

## Dinámica No lineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 1 - Flujos unidimensionales.

1er Cuatrimestre 2013

**Problema 1:** Analice las siguientes ecuaciones gráficamente. En cada caso haga un dibujo del campo vector, encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de  $x(t)$  para distintas condiciones iniciales. Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para  $x(t)$ ; si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada.

(a)  $\dot{x} = 4x^2 - 16$

(b)  $\dot{x} = x - x^3$

(c)  $\dot{x} = 1 + 0.5 \cos x$

(d)  $\dot{x} = e^x - \cos x$  (hint: grafique  $e^x$  y  $\cos x$  en el mismo gráfico y busque las intersecciones.

No se pueden encontrar los puntos fijos analíticamente, pero si puede explicar el comportamiento cualitativo)

(e)  $\dot{x} = 1 - x^{14}$

(f)  $\dot{x} = e^{-x} \sin x$

(g)  $\dot{x} = 1 - 2 \cos x$

**Problema 2:** Resuelva la ecuación logística  $\dot{N} = rN(1 - N/K)$  para una condición inicial arbitraria  $N_0$ . Hint: use un cambio de variables  $x = 1/N$ .

**Problema 3:** El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz  $\dot{N} = -aN \ln(bN)$ , donde  $N(t)$  es proporcional al número de células en el tumor y  $a, b > 0$  son parámetros.

(a) Interprete  $a$  y  $b$  biológicamente.

(b) Dibuje el campo vector y luego grafique  $N(t)$  para varias condiciones iniciales.

**Problema 4:** Use estabilidad lineal para clasificar los puntos fijos de los siguientes sistemas. Si la estabilidad lineal falla porque  $f'(x^*) = 0$ , use un argumento gráfico para demostrar estabilidad.

(a)  $\dot{x} = x(1 - x)$

(b)  $\dot{x} = x(1 - x)(2 - x)$

(c)  $\dot{x} = \tan x$

(d)  $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$

(e)  $\dot{x} = ax - x^3$ , donde  $a$  puede ser positivo, cero, o negativo. Discuta todos los casos.

(f)  $\dot{x} = x^2(6 - x)$

(g)  $\dot{x} = \ln x$

**Problema 5:** Usando estabilidad lineal, clasifique todos los puntos fijos del modelo de Gompertz de crecimiento de tumores  $\dot{N} = -aN \ln(bN)$ .

Problema 6: En mecánica estadística existe el fenómeno de *critical slowing down*, una característica de una transición de fases de segundo orden. En la transición, el sistema se relaja a un equilibrio mucho mas lento que lo usual. Acá hay una versión matemática del mismo efecto:

- (a) Obtenga una solución analítica para  $\dot{x} = -x^3$  para una condición inicial arbitraria. Muestre que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , pero el decaimiento no es exponencial.
- (b) Para obtener una intuición sobre la “lentitud” del decaimiento, compare la evolución temporal de la solución anterior con la solución de  $\dot{x} = -x$ .

Problema 7: Una partícula viaja en  $x \geq 0$  con una velocidad dada por  $\dot{x} = -x^c$ , donde  $c$  es real y constante.

- (a) Encuentre todos los valores de  $c$  tal que el origen  $x = 0$  es un punto fijo estable.
- (b) Suponga que elige un  $c$  tal que el origen es estable. Puede la partícula llegar al origen en un tiempo *finito*? Calcule en función de  $c$ , el tiempo que tarda la partícula viajar de  $x = 1$  a  $x = 0$ .

Problema 8: Considere la ecuación  $\dot{x} = rx + x^3$ , para  $r > 0$  fijo. Muestre que  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  en un tiempo finito, comenzando por cualquier condición inicial  $x_0$ .

Problema 9: Muestre que el problema de valores iniciales  $\dot{x} = x^{1/3}$ ,  $x(0) = 0$  tiene un número infinito de soluciones. hint: construya una solución que se quede en  $x = 0$  hasta un  $t_0$  arbitrario, donde comienza a despegarse.

Problema 10: Para cada uno de los campos vectores siguientes, grafique el potencial  $V(x)$  e identifique todos los equilibrios y su estabilidad. Recuerde que el potencial  $V(x)$  se define como  $\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx}$ .

- (a)  $\dot{x} = x(1 - x)$
- (b)  $\dot{x} = \sin x$
- (c)  $\dot{x} = 3$
- (d)  $\dot{x} = 2 + \sin x$
- (e)  $\dot{x} = -\sinh x$
- (f)  $\dot{x} = r + x - x^3$ , para distintos valores de  $r$ .