

Dinámica Nolineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 3 Flujos bidimensionales y espacio de fases 1er Cuatrimestre 2013

Problema 1: Repaso de sistemas lineales

Dado el sistema $\dot{x} = A x$, donde $A \in R^{N \times N} = cte$ y $x \in R^N$. Demostrar que $x(t) = A_0 e^{At}$ es solución del sistema.

Problema 2: **Clasificación de sistemas lineales**

Considere el sistema $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 2x + y$.

- Escriba el sistema en forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Muestre que el polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ y encuentre los autovalores.
- Encuentre la solución general del sistema.
- Clasifique el punto fijo en el origen.
- Resuelva el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

Problema 3: Considere el sistema $\dot{x} = -y, \dot{y} = -x$.

- Realice un diagrama del campo vector.
- Muestre que las trayectorias del sistema son hipérbolas de la forma $x^2 - y^2 = C$.
Hint: Muestre que $x\dot{x} - y\dot{y} = 0$ e integre esta ecuación.
- El origen es un saddle. Encuentre ecuaciones para sus variedades estables e inestables.
- El sistema se puede desacoplar de la siguiente manera. Realice un cambio de variables $u = x + y, v = x - y$, y reescriba el sistema en términos de u, v . Resuelva para $u(t)$ y $v(t)$ dada una condición inicial (u_0, v_0) .
- Como son las ecuaciones para la variedad estable e inestable en términos de u y v ?
- Finalmente encuentre la solución general para $x(t)$ y $y(t)$, dada una condición inicial (x_0, y_0) .

Problema 4: Considere el sistema $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y$.

- Encuentre la matriz A y muestre que tiene autovalores $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$, con autovectores $\mathbf{v}_1 = (i, 1), \mathbf{v}_2 = (-i, 1)$.
- La solución general es $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$. Reescriba esta expresión usando funciones valuadas en los reales (senos y cosenos).

Problema 5: Dado el sistema $\dot{x} = Ax$, con $A \in R^{2 \times 2} = cte$ y $x \in R^2$ se pueden caracterizar todas las soluciones de este sistema a partir de la traza y el determinante de A . Realice un diagrama en el plano $(tr A, det A)$ mostrando los comportamientos que se obtienen para las diferentes zonas.

Problema 6: Dibuje el retrato de fase y clasifique los puntos fijos de los siguientes sistemas lineales. Si los autovectores son reales muestrelos en el gráfico.

- (a) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x - 3y$
- (b) $\dot{x} = 5x + 10y, \quad \dot{y} = -x - y$
- (c) $\dot{x} = 3x - 4y, \quad \dot{y} = x - y$
- (d) $\dot{x} = -3x + 2y, \quad \dot{y} = x - 2y$
- (e) $\dot{x} = 5x + 2y, \quad \dot{y} = -17x - 5y$
- (f) $\dot{x} = -3x + 4y, \quad \dot{y} = -2x + 3y$

Problema 7: Muestre que la matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$ tiene solo un autoespacio unidimensional correspondiente al autovalor λ . Resuelva el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ y dibuje el retrato de fases.

Problema 8: Considere la ecuación de un circuito RLC, $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$, donde $LC > 0$ y $R \geq 0$.

- (a) Reescriba el sistema como de dos dimensiones.
- (b) Muestre que el origen es asintóticamente estable si $R > 0$ y neutralmente estable si $R = 0$.
- (c) Clasifique el punto fijo en el origen dependiendo si $R^2C - 4L$ es positivo, negativo o cero. Dibuje un retrato de fases para los tres casos.

Problema 9: Sistemas No-Lineales: Retratos de fases

Para los siguientes sistemas encuentre los puntos fijos. Dibuje las nulclinas, el campo vector y un posible retrato de fases.

- (a) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = 1 - e^x$
- (b) $\dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = -y$
- (c) $\dot{x} = x(x - y), \quad \dot{y} = y(2x - y)$
- (d) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(1 + y) - 1$
- (e) $\dot{x} = x(2 - x - y), \quad \dot{y} = x - y$

Problema 10: Retratos de fase utilizando computadoras

Por medio de integración numérica obtenga retratos de fase para los siguientes sistemas:

- (a) (oscilador van del Pol) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2)$
- (b) (punto fijo en un dipolo) $\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2$.
- (c) (mounstro de dos cabezas) $\dot{x} = y + y^2, \quad \dot{y} = -x/2 + y/5 - xy + 6y^2/5$

Problema 11: Aproximación en series de la variedad estable

El sistema $\dot{x} = x + e^{-y}, \dot{y} = -y$ tiene un punto fijo y un saddle en $(-1, 0)$. La variedad inestable es el eje x , pero su variedad estable es una curva que es más difícil de encontrar.

- (a) Sea (x, y) un punto en la variedad estable y asuma que (x, y) está cerca de $(-1, 0)$. Introduzca una nueva variable $u = x + 1$ y reescriba la variedad estable como $y = a_1u + a_2u^2 + O(u^3)$. Para determinar los coeficientes, derive las dos expresiones para dy/dx e igualelas término a término.

- (b) Compruebe utilizando una computadora que su resultado analítico produce una curva con la misma forma que la variedad numérica.

Problema 12: Puntos fijos y linealización

Para cada uno de los sistemas, encuentre los puntos fijos, clasifíquelos, y dibuje un retrato de fases en un entorno de los mismos. Trate de llenar el espacio en blanco entre los puntos fijos.

- (a) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x^2 - 4$
- (b) $\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = x - x^3$
- (c) $\dot{x} = 1 + y - e^{-x}, \quad \dot{y} = x^3 - y$
- (d) $\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = \cos x$
- (e) $\dot{x} = xy - 1, \quad \dot{y} = x - y^3$

Para cada uno de los sistemas de arriba realice un retrato de fases usando integración numérica.

Problema 13: Considere el sistema $\dot{x} = y^3 - 4x, \dot{y} = y^3 - y - 3x$.

- (a) Encuentre todos los puntos fijos.
- (b) Muestre que la línea $x = y$ es invariante (toda trayectoria que comienza en la línea se queda allí.)
- (c) Muestre que $|x(t) - y(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todas las trayectorias. Hint: escriba una ecuación diferencial para $x - y$.
- (d) Dibuje un retrato de fases.
- (e) Con la computadora realice un retrato de fases preciso en el dominio $-20 \leq x, y \leq 20$. Utilice un paso de integración suficientemente pequeño para no tener inestabilidades numéricas. Fíjense que las trayectorias parecen acercarse a una curva en $t \rightarrow -\infty$. Puede explicar esto intuitivamente y tal vez encontrar una curva aproximada?

Problema 14: Sensibilidad a términos no lineales Mostremos un ejemplo donde los términos no lineales pueden cambiar el retrato de fases localmente. Considere el sistema en coordenadas polares $\dot{r} = -r, \dot{\theta} = 1/\ln r$.

- (a) Encuentre $r(t)$ y $\theta(t)$ explícitamente.
- (b) Muestre que $r(t) \rightarrow 0$ y $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ a medida que $t \rightarrow \infty$, entonces el origen es un foco atractor del sistema no lineal.
- (c) Reescriba el sistema en coordenadas (x, y) .
- (d) Muestre que el sistema linealizado cerca del origen es estable pero no foco.

Problema 15: Estabilidad estructural y conexión saddle Considere el sistema $\dot{x} = a + x^2 - xy, \dot{y} = y^2 - x^2 - 1$, donde a es un parámetro.

- (a) Muestre el retrato de fases para $a = 0$. Muestre que hay una trayectoria que conecta los dos saddles. Esta órbita se denomina *conexión saddle*.
- (b) Mediante una computadora si es necesario, vea que para $a \neq 0$ la conexión saddle se rompe. El punto del ejercicio es mostrar que una pequeña perturbación puede modificar la topología del retrato de fases, por lo que se denomina *sistema estructuralmente*

inestable.

El teorema de Peixoto da condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad estructural de un sistema 2D. [OPCIONAL] Cual de las condiciones no se cumple en este caso? (ver Guckenheimer y Holmes, pp.60)

Problema 16: En el siguiente sistema, el origen es un punto fijo no hiperbólico. Discuta la estabilidad del origen para $\epsilon < 0$. AYUDA: Considere la función de Lyapunov $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \epsilon x^2 y\end{aligned}$$

Problema 17: En mecánica clásica es habitual estudiar las pequeñas oscilaciones de un sistema alrededor de sus equilibrios. Considere el sistema $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ y suponga que $V(q)$ tiene un mínimo en q_0 .

(a) Muestre que $(q_0, 0)$ es un punto fijo del sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q} &= -\dot{p} \\ \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q}\end{aligned}$$

(b) Es este punto fijo estable? Discuta la estabilidad de esta solución.

(c) Que ocurre si perturbo esta solución? Muestre que la solución perturbada queda en un entorno de $(q_0, 0)$