Dinámica No lineal (Cátedra Mindlin)

Guía Nº 5 - Bifurcaciones en 2D

1er Cuatrimestre de 2013

Problema 1: Para cada uno de los siguientes sistemas encontrar los autovalores como función de μ. Dibujar el campo vector para $\mu = 0$ y $\mu \neq 0$. ¿Cuánto valen los autovalores en la bifurcación?

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

Problema 2: Encontrar y clasificar todas las bifurcaciones del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - ax \\ \dot{y} &= -by + x/(1+x) \end{aligned}$$

Problema 3: Sea $F(q,p) : R^{NxM} \rightarrow R^N$ un campo vector donde $q \epsilon R^N$ y $p \epsilon R^M$. Muestre que la intersección de nulclinas es condición necesaria para tener una bifurcación local del campo. (la condición no es suficiente, pues la intersección debe ser transversa).

Problema 4: **Gusanos vs. Bosque.** Ludwig propuso un modelo para los efectos de una población de gusanos en un bosque de abetos. Se asume que la condición del bosque está caracterizada por $S(t)$ (tamaño promedio de los árboles) y $E(t)$, reserva de energía (una medida de la salud del bosque). En presencia de una población constante de gusanos B, la dinámica del bosque está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S}\frac{K_E}{E}\right) \\ \dot{E} &= r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - P\frac{B}{S} \end{aligned}$$

donde $r_S, r_E, K_S, K_E, P > 0$.

(a) Interpretar los términos en el modelo biológico.
(b) Adimensionalizar el sistema.
(c) Dibujar las nulclinas. Mostrar que si B es chico hay 2 puntos fijos, y ninguno si B es grande. ¿Qué tipo de bifurcación ocurre para el valor crítico B_c?
(d) Dibujar el retrato de fases para B chico y B grande.

Problema 5: **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1-2b-r^2)$, $\dot{y} = -x + ay(1-r^2)$, donde a y b son parámetros ($0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2$) y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.
(b) Pruebe que al menos tiene una órbita periódica, y si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a, b)$.
(c) Pruebe que para $b = 0$ hay solo una órbita periódica.

Problema 6: Estudie el sistema $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos\theta, \quad \dot{\theta} = 1$.
(a) Por medio de simulaciones numéricas, vea si existe un un parámetro $\mu > 0$ crítico donde la órbita periódica desaparece.
(b) Usando el teorema de Poincaré-Bendixon muestre que hay una órbita periódica en el ánulo $\sqrt{1-\mu} < r < \sqrt{1+\mu}$ para todo $\mu < 1$.
(c) Para aproximar la forma de $R(\theta)$ de la órbita para $\mu \ll 1$, asuma una serie de potencias de la forma $r(\theta) = 1 + \mu r_1(\theta) + O(\mu^2)$. Sustituya esta solución en la ecuación diferencial $dr/d\theta$ y aproxime tirando los términos de orden $O(\mu^2)$. Obtenga entonces una ecuación diferencial para $r_1(\theta)$, y resuélvala. Esta aproximación se conoce como *perturbaci'on regular*.
(d) Muestre que la solución está dentro del ánulo encontrado previamente.
(e) Compare mediante simulaciones numéricas la solución analítica encontrada y exacta. Como depende el error de μ?

Problema 7: Considere el oscilador de van der Pol $\ddot{x} + \mu(x^2 - 4)\dot{x} + x = a$. Encuentre las curvas (μ, a) donde ocurre la bifurcación de Hopf.

Problema 8: Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen bifurca Hopf en $\mu = 0$ y mediante simulaciones numéricas verifique si la bifurcación es sub- o supercrítica.
(a) $\dot{x} = y + \mu x, \qquad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$
(b) $\dot{x} = \mu x + y - x^3, \qquad \dot{y} = -x + \mu y + 2y^3$
(c) $\dot{x} = \mu x + y - x^2, \qquad \dot{y} = -x + \mu y + 2x^2$

Problema 9: Considere el sistema predador-presa,

$$\dot{x} = x(b - x - \frac{y}{1+x}), \quad \dot{y} = y(\frac{x}{1+x} - ay) \tag{1}$$

donde $x, y \geq 0$ son las poblaciones y $a, b > 0$ son par'ametros.
(a) Dibuje las nulclinas y discuta las bifurcaciones que ocurren si b cambia.
(b) Muestre que hay un punto fijo $x^*, y^* > 0$, para todo $a, b > 0$. Use un método gráfico para esto.
(c) Muestre que ocurre una bifurcaci'on de Hopf en (x^*, y^*) si $a = a_c = \frac{4(b-2)}{b^2(b+2)}$, donde $b > 2$.
(d) Mediante simulaciones numéricas compruebe el resultado anterior y muestre que la bifurcaci'on es sub- o supercrítica.

Problema 10: Considere un modelo de respiración de un cultivo de bacterias,

$$\dot{x} = B - x - \frac{xy}{1+qx^2}, \qquad \dot{y} = A - \frac{xy}{1+qx^2} \tag{2}$$

donde x e y son lo niveles de nutrientes y oxígeno, y $A, B, q > 0$ son parámetros. Investigue la dinámica de este modelo. Encuentre todos los puntos fijos y clasif'iquelos. Estudie las nulclinas y trate de construir una *región atrapante* del sistema. Puede encontrar condiciones sobre los parámetros donde existe una órbita periódica estable? Use simulaciones numéricas o resultados de la bifurcación de Hopf, o lo que resulte útil. El problema es abierto asi que discútalo.

Problema 11: Considere el siguiente problema de dinámica de poblaciones, donde ambas tienen una capacidad de carga finita,

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= r_1 N_1 (1 - N_1/K_1) - b_1 N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= r_2 N_2 (1 - N_2/K_2) - b_2 N_1 N_2\end{aligned}$$

(a) Adimensionalice el modelo. Cuantos grupos adimensionales son necesarios?
(b) Muestre que hay 4 retratos de fases cuantitativamente distintos, en términos del comportamiento asintótico del sistema.
(c) Encuentre las condiciones por las cuales las dos poblaciones pueden coexistir establemente. Explique el significado biológico de la condición. Hint: la capacidad de carga refleja la competencia dentro de la misma especie, donde b refleja la competencia entre especies.

Problema 12: **Modelo epidemiológico revisado** La idea es ver que es más sencillo analizar este problema en el espacio de fases. El modelo es:

$$\dot{x} = -kxy, \qquad \dot{y} = kxy - ly \tag{3}$$

donde $k, l > 0$.
(a) Encuentre y clasifique todos los puntos fijos.
(b) Haga un dibujo de las nulclinas y del campo vector.
(c) Encuentre una cantidad que se conserve en el sistema.
(d) Haga un retrato de fases. Que pasa en $t \to \infty$?
(e) Sea (x_0, y_0) una condición inicial. Una epidemia ocurre cuando $y(t)$ aumenta inicialmente. Bajo que condiciones esto ocurre?

Problema 13: **Sistema excitable** Un modelo clásico de excitabilidad es el de Fitzhugh-Nagumo, que modela el potencial de acción de una membrana celular:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a + bx + x^2 - xy\end{aligned}$$

(a) Dibuje las nulclinas, encuentre los puntos fijos graficamente y construya un retrato de fases aproximado para las siguientes condiciones de parámetros: (i) $b > 0$ $a < 0$, (ii) $b < 0$ $a > 0$ y $b >> a$.

(b) Halle una relación explícita entre los parámetros del sistema para que se produzca una bifurcación *saddle-node*.

(c) Encuentre la condición para que se produzca una bifurcación de Hopf.

(d) En el espacio de paraámetros (a, b) represente como curvas las dos condiciones anteriores y ensaye un retrato de fases en cada una de las regiones en las que queda dividido el plano. A partir del gráfico deduzca la necesidad de una conexión homoclínica adicional a las bifurcaciones anteriores.