Dinámica no lineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 6 - Formas normales
1er Cuatrimestre de 2013

Problema 1: Determine la forma normal de los siguientes sistemas linealizados

$$i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Problema 2: Sea $X(x)$ un campo vector suave que satisface Tr $DX(0)$=Det $DX(0)$=0, $DX(0) \neq 0$. Demostrar que la forma normal de X viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{r=2}^{N} \begin{pmatrix} a_r y_1^r \\ b_r y_1^r \end{pmatrix} + O(|\mathbf{y}|^{N+1})$$

Problema 3: Dada $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, calcular $L_A \begin{pmatrix} x^m \\ 0 \end{pmatrix}$ y $L_A \begin{pmatrix} 0 \\ x^m \end{pmatrix}$, con $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$. Obtenga la representación matricial de L_A respecto de la base

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Muestre que los autovalores de L_A están dados por $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 - \lambda_i$, $i = 1, 2$, con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y $m_1 + m_2 = r = 2$.

Problema 4: Generalice el ejercicio anterior para encontrar la matriz representativa de $L_\Lambda : H^r \to H^r$, $r \geq 2$ cuando $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Muestre que los autovalores de L_Λ se repiten con valor $\lambda(r-1)$. Muestre que L_A^{-1} existe sí y sólo sí $\lambda \neq 0$.

Problema 5: Considere el campo vector en C^r $(r \geq 2)$

$$\dot{x} = f(x, \mu), \qquad x \in R^2, \mu \in R^1$$

definido en un entorno abierto suficientemente grande de $R^2 \times R^1$. Suponga que $(x, \mu) = (0, 0)$ es un punto fijo de este campo vector y que $D_x f(0, 0)$ tiene un par de autovalores imaginarios puros.

(a) Muestre que existe una curva de puntos fijos $x(\mu)$, $x(0) = 0$, para μ suficientemente pequeño.

(b) Usando esta curva de puntos fijos como una transformación de coordenadas dependiente de parámetro, muestre que se pueden elegir coordenadas de manera tal que el origen en el espacio de fase siga siendo punto fijo para μ suficientemente pequeño.