Dinámica Nolineal (Cátedra Mindlin)

Guia N° 7 - Reducción a la variedad central

1er Cuatrimestre de 2013

Problema 1: Estudie la dinámica cerca del origen de los siguientes sistemas. Dibuje los retratos de fases, y calcule la variedad central y la dinámica sobre ella. Diga si el origen es estable o inestable.

(a)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{2} + y + x^2 y \\ \dot{y} &= x + 2y + y^2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 2y \\ \dot{y} &= x + y + x^4 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -e^x + e^{-x} + 2x \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y - z - yz \\ \dot{y} &= -x - y - z - xz \\ \dot{z} &= -x - y - z - xy \end{aligned}$$

Problema 2: Estudie los sistemas dinámicos parametrizados por ϵ. Para $\epsilon = 0$ el origen es un punto fijo. Calcule la familia de un parámetro de variedades centrales y describa la dinámica en la variedad. Fijese que en $\epsilon = 0$ los sistemas coinciden con los del ejercicio 1. Discuta el rol que juega el parámetro si multiplica el término lineal o nolineal.

(a)

$$i)\ \begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + \epsilon v + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta \end{aligned} \qquad ii)\ \begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + \epsilon v^2 + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta \end{aligned}$$

(b)

$$i)\ \begin{aligned} \dot{x} &= x/2 + y + x^2 y \\ \dot{y} &= x + 2y + \epsilon y + y^2 \end{aligned} \qquad ii)\ \begin{aligned} \dot{x} &= x/2 + y + x^2 y \\ \dot{y} &= x + 2y + \epsilon y^2 + y^2 \end{aligned}$$

(c)

$$i)\quad \begin{aligned}\dot{x} &= 2x+2y+\epsilon y\\ \dot{y} &= x+y+x^4\end{aligned} \qquad ii)\quad \begin{aligned}\dot{x} &= 2x+2y\\ \dot{y} &= x+y+x^4+2\epsilon y^2\end{aligned}$$

(d)

$$i)\quad \begin{aligned}\dot{x} &= -x-y-z+\epsilon x-yz\\ \dot{y} &= -x-y-z-xz\\ \dot{z} &= -x-y-z-xy\end{aligned} \qquad ii)\quad \begin{aligned}\dot{x} &= -x-y-z-yz+\epsilon x^2\\ \dot{y} &= -x-y-z-xz\\ \dot{z} &= -x-y-z-xy\end{aligned}$$

<u>Problema 3:</u> Reduzca a la variedad central alrededor de la bifurcación en $\rho = 1$ del sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\\ \dot{y} &= \rho x - y - xz\\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

donde $\sigma, \beta > 0$. Diga de que bifurcación se trata.

<u>Problema 4:</u> Se quiere estudiar el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon(-x+xy)\\ \dot{y} &= -y+x^2\end{aligned}$$

Como hemos visto en ejercicios anteriories, este sistema tiene dos escalas de tiempo y, por lo tanto, se podrá reducir su dimensión. La idea de este problema es formalizar la manera en que se venía haciendo esta reducción. La propuesta es resolverlo primero a la vieja usanza y luego resolverlo reduciendo a la variedad central.

(a) Para $\epsilon << 1$ encuentre la ecuación diferencial a la cual se aproxima el problema.

(b) Pensando a ϵ como un parámetro, muestre que el origen es un punto de bifurcación si $\epsilon = 0$, es decir, que hay algún autovalor $\lambda = 0$ y por lo tanto se podrá reducir a la variedad central.

(c) Reduzca el sistema a la variedad central y encuentre la dinámica sobre la misma (para esto conviene hacer el truco de pensar a ϵ como una variable y agregar la ecuación $\dot{\epsilon} = 0$). Encontró lo mismo que haciendolo "a ojo"?

Nota: Si todo salió bien, uno debería encontrar la misma dinámica usando los dos métodos. Reduciendo a la variedad central uno demostró que en un entorno del origen, y para ϵ lo suficientemente chico, existe una solución $u(t)$ del sistema reducido que cumple

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma}t)\\ y(t) &= h(u(t),\epsilon) + O(e^{\gamma}t)\end{aligned}$$

con $\gamma > 0$ una constante.

Problema 5: El sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x + x^2 - y^2 \\
\dot{y} &= ay - y^3 + xy
\end{aligned}
$$

presenta dos bifurcaciones

(a) Calcule los puntos fijos (no se complique con una expresión explícita, pero muestre claramente en forma gráfica las soluciones)

(b) Muestre que uno de los autovalores del jacobiano se anula en cada bifurcación. Nombre cada bifurcación e identifique el punto fijo que está bifurcando en cada caso

(c) Considere un entorno del origen. En términos del método de la variedad central: Para que valores del parmetro espera reducir la dinámica a una descripción unidimensional?

(d) Calcule la variedad central que depende del parámetro. Reduzca la dinámica a la variedad central e identifique la bifurcación que quedó incluida. Se condice con el resultado del item 2?

Problema 6: (OPCIONAL)

Dado el sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \mu x - (x^2 + 2y^2)x + bycos(z + \theta) \\
\dot{y} &= \mu y - (2x^2 + y^2)y + bxcos(z - \theta) \\
\dot{z} &= \alpha(x^2 - y^2) - b(\frac{x}{y} sin(z - \theta) + \frac{y}{x} sin(z + \theta))
\end{aligned}
$$

con las variables $(x, y, z)\epsilon R^+ \times R^+ \times S^1$ y los parametros $(b, \theta)\epsilon R^+ \times S^1$.

(a) Encuentre los puntos fijos de este sistema que satisfacen $x = y$

(b) Linealice el campo vector en un entorno de estos puntos fijos. Para que valores de los parámetros el campo vector linealizado tiene dos autovalores nulos?

(c) Muestre que en un entorno del punto fijo en $x = y$, $z = 0$ y para los valores de parametros cercanos a $\mu = \pm 5bcos(\theta)$, $\alpha^{-1} = -tan(2\theta)$, el sistema puede ser aproximado por

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= ax + by \mp x^3 - x^2 y
\end{aligned}
$$

Ayuda: Realice el cambio de variables $B^2 = x^2 + y^2, u = x^2 - y^2$. Verifique que la dinámica, para los valores de parámetros indicados arriba, puede ser proyectada en la variedad $B = constante$.

(d) Interprete las diferentes soluciones del sistema reducido en términos de las variables originales

(e) Muestre que el $\overset{x}{-}$ de las ecuaciones reducidas depende del signo de $C = 2 - \alpha.tan(\theta) - 3\alpha.tan^3(\theta)$