Dinámica Nolineal (Cátedra Mindlin)

Guía Nº 8 - Mapas
1er Cuatrimestre de 2013

Problema 1: **Construcción de un Mapa de Poincaré**
Considere la siguiente ecuación diferencial de un oscilador forzado periódicamente con disipación $\delta > 0$:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma cos(\omega t)$$

(a) Encuentre la solución general del sistema homogéneo teniendo en cuenta los valores posibles de $\delta^2 - 4\omega_0^2$. ¿A qué tiende la solución $x_{hom}(t)$ con t tendiendo a infinito?
(b) Halle la solución particular $x_p(t) = Acos(\omega t) + Bcos(\omega t)$. Escriba la solución general $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ para el caso $\delta^2 - 4\omega_0^2 < 0$ y obtenga los valores de las constantes de su expresión a partir de las condiciones iniciales (x_0, y_0) en $t = 0$.
(c) Reescriba la ecuación del oscilador como un sistema de ecuaciones y conviértala en un sistema autónomo definiendo la variable $\dot{\theta} = \omega$.
(d) Defina la sección Σ de Poincaré correspondiente a la condición $\theta = 0 \in \mathbf{S^1}$. Encuentre el tiempo T que transcurre entre cada intersección del flujo con Σ. Escriba a partir de la solución en b) con las condiciones iniciales el mapa $P : \Sigma \to \Sigma$.
(e) Compruebe que $(x, y) = (A, \omega B)$ es un punto fijo del mapa. Encuentre los autovalores de su parte lineal. ¿Es este punto asintóticamente estable? Dibuje la trayectoria de los puntos en el plano (x, y).
(f) ¿Qué ocurre cuando hay resonancia $\omega = (1/2)\sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2}$?
(g) Para el caso $\delta = 0$ resuelva el sistema nuevamente y grafique la solución en el toro extendido. Estudie los casos i) $\omega = m\omega_0$ ii) $n\omega = \omega_0$, con $m, n > 1 \in \mathbf{N}$

Problema 2: **Mapa del Anillo**
Considere la siguiente ecuación diferencial para $A \in \mathbf{C}$:

$$\frac{dA}{dt} = (1 + i\eta)A - (1 - i\alpha)|A|^2 A + i\epsilon\rho(t)$$

con la función forzante tipo “pataditas”:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares (del plano complejo). Compruebe que la solución entre patadas es para la coordenada radial y la angular:

$$\begin{aligned} R(t) &= \left(1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2} e^{-2t}\right)^{-1/2} \\ \theta(t) &= \theta_0 + (\eta - \alpha)t - \frac{\alpha}{2} ln\left(R_0^2 + (1 - R_0^2)e^{-2t}\right) \end{aligned}$$

(b) Observe que $p(t)$ modifica a $R = \sqrt{Im(A)^2 + Re(A)^2} \rightarrow R = \sqrt{(Im(A) + \epsilon)^2 + Re(A)^2}$ luego de cada patada. Componga este movimiento con el del item anterior para encontrar como se mapean los puntos previos a cada patada. Verifique que para el límite $R \approx 1$ y $\epsilon \ll 1$ se obtiene el siguiente mapa:

$$
\begin{aligned}
R_{n+1} &= 1 + (R_n + \epsilon sen(\theta_n) - 1)e^{-2T} \\
\theta_{n+1} &= \theta_n + (\eta - \alpha)T + \epsilon cos(\theta_n) - \alpha(1 - e^{-2T})(R_n + \epsilon sen(\theta_n))
\end{aligned}
$$

(c) Estudie este mapa y vea que se transforma en el mapa del círculo si $T \gg 1$

Problema 3: **Mapas lineales**

Analice los siguientes mapas. Compute las rbitas e ilstrelas en el espacio de fases. Describa las variedades estables, inestables y centrales del origen.

(a)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} |\lambda| < 1 \\ |\mu| > 1 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} |\lambda| < 1 \\ |\mu| < 1 \end{matrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \omega > 0$$

(c)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad |\lambda| < 1$$

(d)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda > 0$$

Problema 4: **Mapas no lineales**

Analice los siguientes mapas. Encuentre sus puntos fijos y discuta su estabilidad en la aproximación lineal. Encuentre a partir de los autovectores las variedades estables e inestables dibujando retratos de fases. ¿Puede encontrar rbitas peridicas de rden superior?

(a)
$$\begin{matrix} x & \rightarrow & x \\ y & \rightarrow & x + y \end{matrix} \quad , \quad (x, y) \in R^2$$

(b)
$$\begin{matrix} x & \rightarrow & x^2 \\ y & \rightarrow & x + y \end{matrix} \quad , \quad (x, y) \in R^2$$

(c)
$$\begin{matrix} \theta_1 & \rightarrow & \theta_1 \\ \theta_2 & \rightarrow & \theta_1 + \theta_2 \end{matrix} \quad , \quad (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$$

(d)
$$\begin{matrix} x & \rightarrow & \frac{2xy}{x+y} \\ y & \rightarrow & (\frac{2xy^2}{x+y})^{1/2} \end{matrix} \quad , \quad (x, y) \in R^2$$

(e)
$$\begin{matrix} x & \rightarrow & \frac{x+y}{2} \\ y & \rightarrow & (xy)^{1/2} \end{matrix} \quad , \quad (x, y) \in R^2$$

Problema 5: **Mapa logístico**

Encuentre los puntos fijos y algunos puntos fijos de periodo bajo del mapa

$$x \rightarrow \mu x(1 - x), \qquad \mu \in [0, 4]$$

¿Puede encontrar valores de bifurcación en los que aparecen nuevas órbitas periódicas?