

Simulaciones numéricas de atractores extraños

Santiago Boari

Dinámica No Lineal, Departamento de Física, FCEyN, UBA

7 de Junio de 2011

Resumen

En este trabajo se estudiarán los atractores extraños de Lorenz y Rössler a través de la integración numérica de ambos sistemas. Específicamente, se estudiarán las evoluciones temporales de las variables de cada sistema y el flujo caótico tridimensional de cada uno. Se mostrará el mapa de Poincaré obtenido para el atractor de Rössler y un breve análisis topológico de sus trayectorias periódicas. Por último, se estudiará el diagrama de bifurcaciones al variar sus parámetros.

Introducción

El atractor de Lorenz está regido por un sistema de tres ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma \cdot (y - x) \\ \dot{y} &= x \cdot (\rho - z) - y \\ \dot{z} &= x \cdot y - \beta z\end{aligned} \quad [1]$$

Con σ , ρ y β parámetros reales y \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} son las derivadas temporales de x , y , z , respectivamente. Este atractor surgió a través del estudio de Edward N. Lorenz de ecuaciones de fenómenos atmosféricos. El sistema también aparece en modelos simplificados de láseres (Haken, 1975).

El sistema de Rössler es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + a \cdot y \\ \dot{z} &= b + z \cdot (x - c)\end{aligned} \quad [2]$$

Con a , b y c parámetros reales.

Se realizarán integraciones numéricas de los sistemas [1] y [2] a través del método de Runge-Kutta para distintos casos y distintos temas a estudiar para ganar comprensión sobre las propiedades de estos atractores extraños.

Resultados y discusión

1. Atractor de Lorenz

Integrando numéricamente el sistema de Lorenz a través del método de Runge-Kutta para $\sigma=10$, $\rho=28$ y $\beta=8/3$, se obtienen las figuras 1 y 2. La primera muestra la serie temporal de la variable x . Por motivos de definición se muestran sólo 100 segundos de la serie temporal, donde se nota que la evolución es de tipo oscilatoria, pero no periódica, aunque de a tramos sea cuasi-periódica. Esto se ve reflejado en la altura máxima de los picos de las oscilaciones, que en un ciclo cuasi-periódico la oscilación se parece en forma pero no llega al mismo valor (ej: la diferencia entre la oscilación que se encuentra entre los 310 y los 320 segundos y la oscilación que le sigue).

Las figuras 2 y 3 muestran el atractor de Lorenz, para su corte en el plano xy (figura 2) y en tres

dimensiones (figura 3).

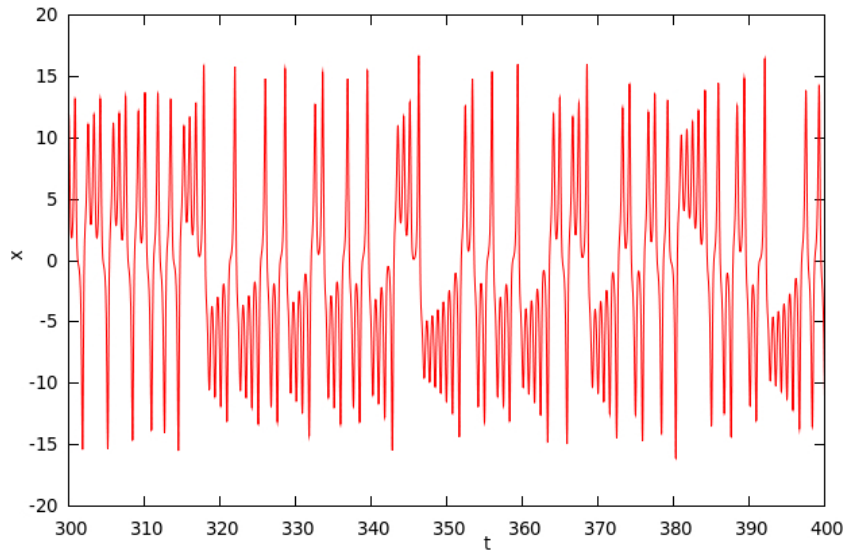


Figura 1: evolución temporal de la variable x para el atractor de Lorenz

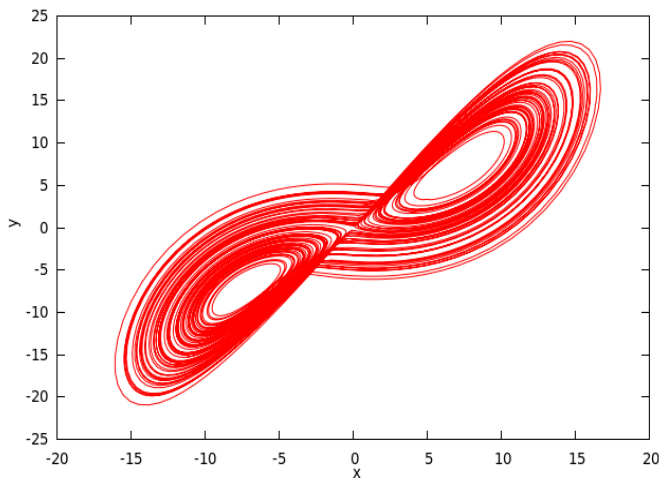


Figura 2: sección xy del atractor de Lorenz

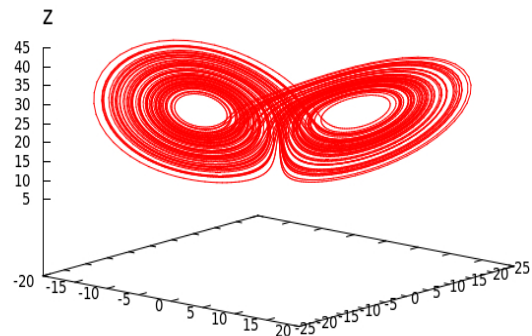


Figura 3: atractor de Lorenz en 3D

En estos gráficos se aprecia el motivo de que la señal temporal sea oscilatoria, pero no periódica. Las trayectorias cruzan de un foco hacia el otro del atractor, oscilando en forma espiralada hasta que cruzan de un foco hacia el otro.

Ahora, en la figura 4, se muestran las trayectorias dentro del sistema para dos condiciones iniciales distanciadas en 10^{-3} en la coordenada x. Para las demás variables se han mantenido las condiciones iniciales fijas en 0. En esta figura se aprecia que las evoluciones temporales del sistema con un pequeño cambio en las condiciones iniciales divergen entre sí después de un cierto tiempo.

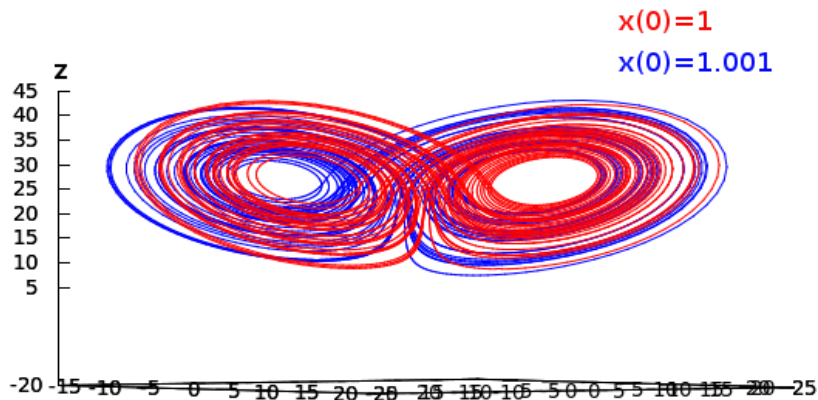


Figura 4: trayectorias obtenidas para dos condiciones iniciales separadas en 10^{-3}

Esto demuestra la sensibilidad de la evolución temporal respecto de las condiciones iniciales. Dado que uno puede medir dichas condiciones con una cierta precisión, esto afecta directamente la capacidad de predicción sobre un sistema real que se comporte como un atractor extraño debido a la imposibilidad de determinar a largo plazo la evolución del sistema. Se puede, sin embargo, realizar predicciones a corto plazo, ya que se nota cierta similitud en las evoluciones del foco derecho en la figura (zona cercana a las condiciones iniciales utilizadas en esta simulación).

2. Atractor de Rössler

Integrando numéricamente el sistema [2] para los valores $a=b=0.2$ y $c=5$, con un diferencial de tiempo de 0.01 durante 1000 “segundos” y dejando que el sistema evolucionara los primeros 300 hacia el atractor antes de comenzar a registrar los datos, se obtiene el flujo caótico del atractor de Rössler que se muestra en la figura 5.

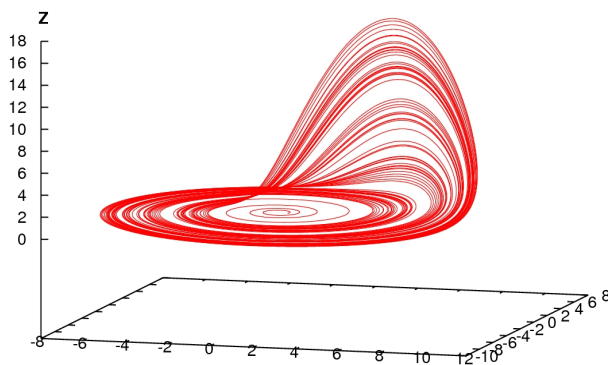


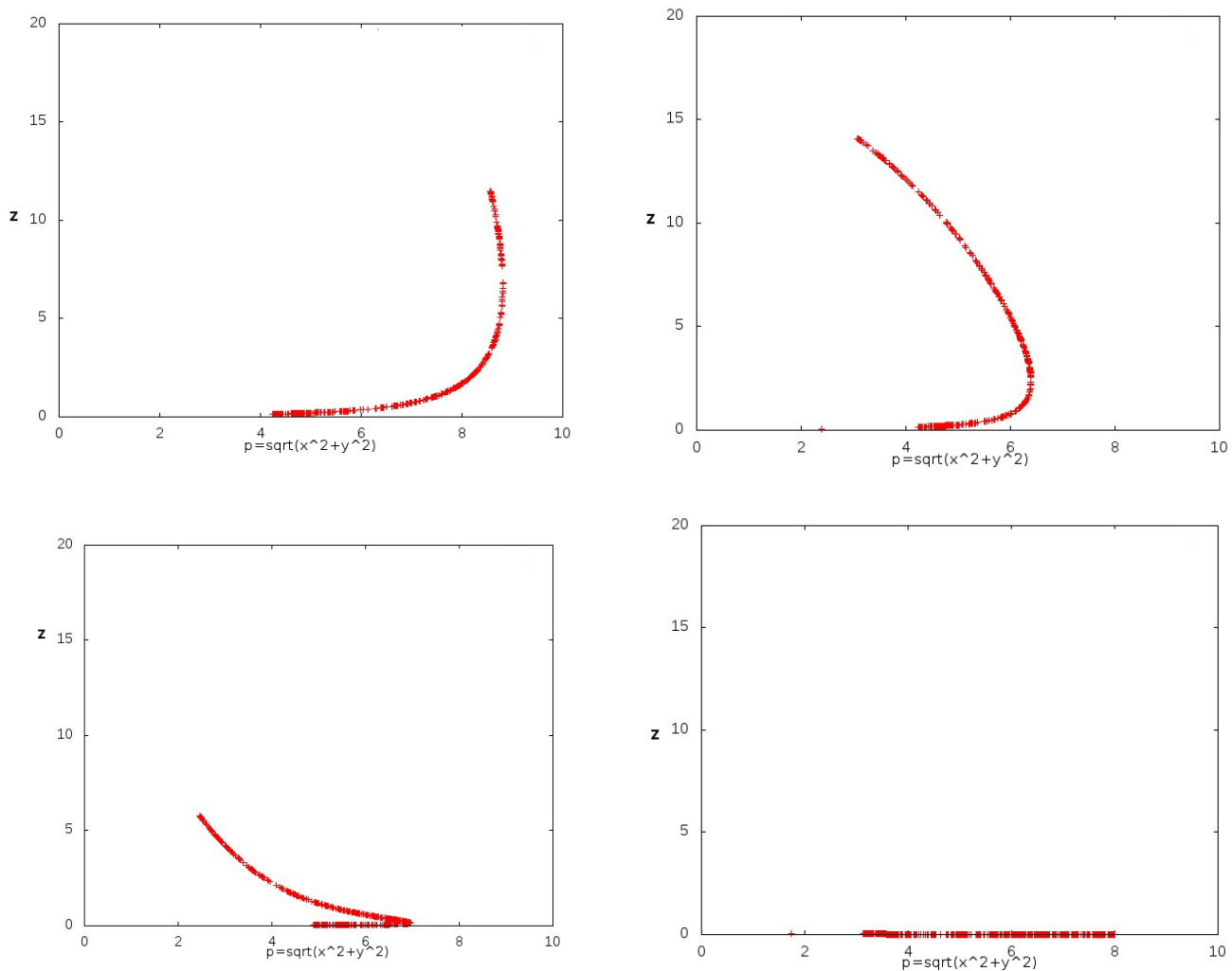
Figura 5: atractor de Rössler

2.2 Trayectorias y mapas de Poincaré

La evolución de este sistema, regida por las ecuaciones [2], es la siguiente: para valores cercanos al origen de coordenadas, las variables x e y comienzan a crecer. Luego de un valor crítico, el movimiento deja de ser planar y las trayectorias comienzan a ascender en z . Cuando el valor de z es lo suficientemente grande, las trayectorias vuelven a reinyectarse cerca del origen, y es por esto que las series temporales de este atractor también tienen carácter oscilatorio.

Para realizar un estudio de las trayectorias obtenidas se obtuvo un mapa de Poincaré, a través del uso de una sección plana centrada en el origen que rota 360 grados hasta llegar a su posición inicial. Se registraron los puntos que atraviesan la sección en cada caso, dando lugar a las figuras 6,7,8 y 9 que se muestran a continuación. A través del estudio del mapa se puede ver cómo las trayectorias se pliegan sobre sí mismas, lo cual es observado en la figura 5.

En la figura 6 se muestra el corte para 0° (contando como ángulo 0 sobre el eje x). La figura 7 para 45° , la figura 8 para 99° y la figura 9 para 180° . Se muestran sólo para estos valores de ángulos debido a que, como puede apreciarse en la figura 5, las trayectorias se mantienen planas para valores de ángulos mayores, hasta que vuelve a levantarse cuando el ángulo es cercano a los 360° (vuelta completa).

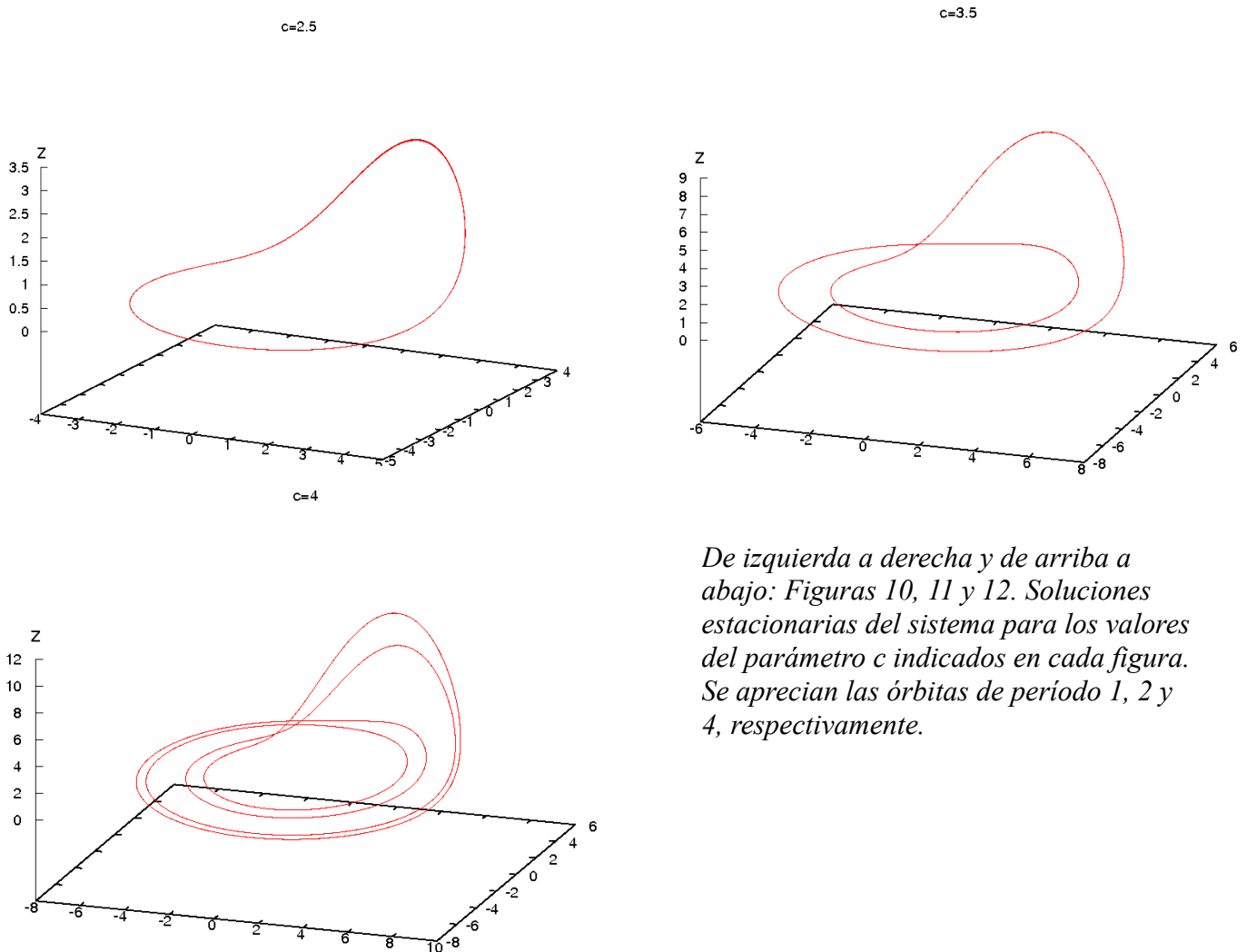


De izquierda hacia derecha y de arriba a abajo: Figuras 6,7,8, y 9 muestran la evolución temporal del mapa de Poincaré para distintos valores de ángulo respecto del eje x . Los ángulos son 0° , 45° , 99° y 180° , respectivamente. Se aprecia cómo las trayectorias se pliegan sobre sí mismas a medida que se recorre la vuelta completa.

2.3 Soluciones del sistema al variar el parámetro c .

Para comenzar la discusión y el estudio de las órbitas periódicas presentes en la estructura del atractor, se obtuvieron las soluciones del sistema variando el parámetro c del sistema [2], y se mira sólo el estado estacionario de cada solución (dejando evolucionar el sistema durante unos 500 segundos antes de tomar datos). Los demás parámetros de integración se mantuvieron fijos respecto de lo presentado en secciones anteriores.

La figura 10 muestra la solución estacionaria del sistema para $c=2.5$. Es apreciable, en este caso, que se está en presencia de una órbita de período 1. Para el valor de $c=3.5$, en cambio, se nota una órbita de período 2 (figura 11). Al tomar $c=4$ (figura 12), se nota una órbita de período 4, y para $c=5$ se obtiene un comportamiento caótico como el mostrado en la figura 5.



De izquierda a derecha y de arriba a abajo: Figuras 10, 11 y 12. Soluciones estacionarias del sistema para los valores del parámetro c indicados en cada figura. Se aprecian las órbitas de período 1, 2 y 4, respectivamente.

2.4 “¿Por qué sucede esto?” o “diagramas de bifurcaciones del atractor”.

Hasta este punto se ha analizado el sistema de Rössler en su forma estacionaria variando el parámetro c presente en las ecuaciones [2]. Se ha visto que a medida que el parámetro crece, se obtienen órbitas de período mayor, hasta que, como se vio en la figura 5, para un valor de $c=5$ se obtiene un comportamiento caótico. En este tipo de comportamiento están conviviendo las órbitas vistas en las

figuras 10, 11 y 12, aunque no sean soluciones estacionarias del problema. Esto es, si se permite al sistema evolucionar el suficiente tiempo, es de esperar que durante esta evolución haya intervalos de tiempo para los cuales el sistema pasa muy cerca de alguna de las órbitas ya vistas. Pero, ¿por qué sucede esto? ¿cuándo se tiene comportamiento caótico? ¿cómo modifican los parámetros a , b y c de las ecuaciones [2] la evolución del sistema?. Dejando el problema de las órbitas “conviviendo” en el comportamiento caótico para la sección siguiente, ahora abordemos el problema del estudio del sistema al variar los parámetros b y c . Para esto buscaremos los diagramas de bifurcaciones para cada caso. Esto es, buscaremos cómo varían los puntos fijos del sistema [2] al variar estos parámetros. Para esto se han realizado integraciones numéricas y se han registrado, en las sucesivas iteraciones, sólo aquellos puntos en los cuales las tres derivadas de [2] son muy cercanas a 0. (Particularmente, menores a un $\epsilon=0.005$).

2.4a. Variando b .

Para este estudio se han dejado fijos los parámetros $a=0.2$ y $c=5.7$, y se ha variado b en un rango entre $b=0$ y $b=3$, con un paso entre iteraciones de $b+=0.005$. Los resultados se muestran en la figura 13.

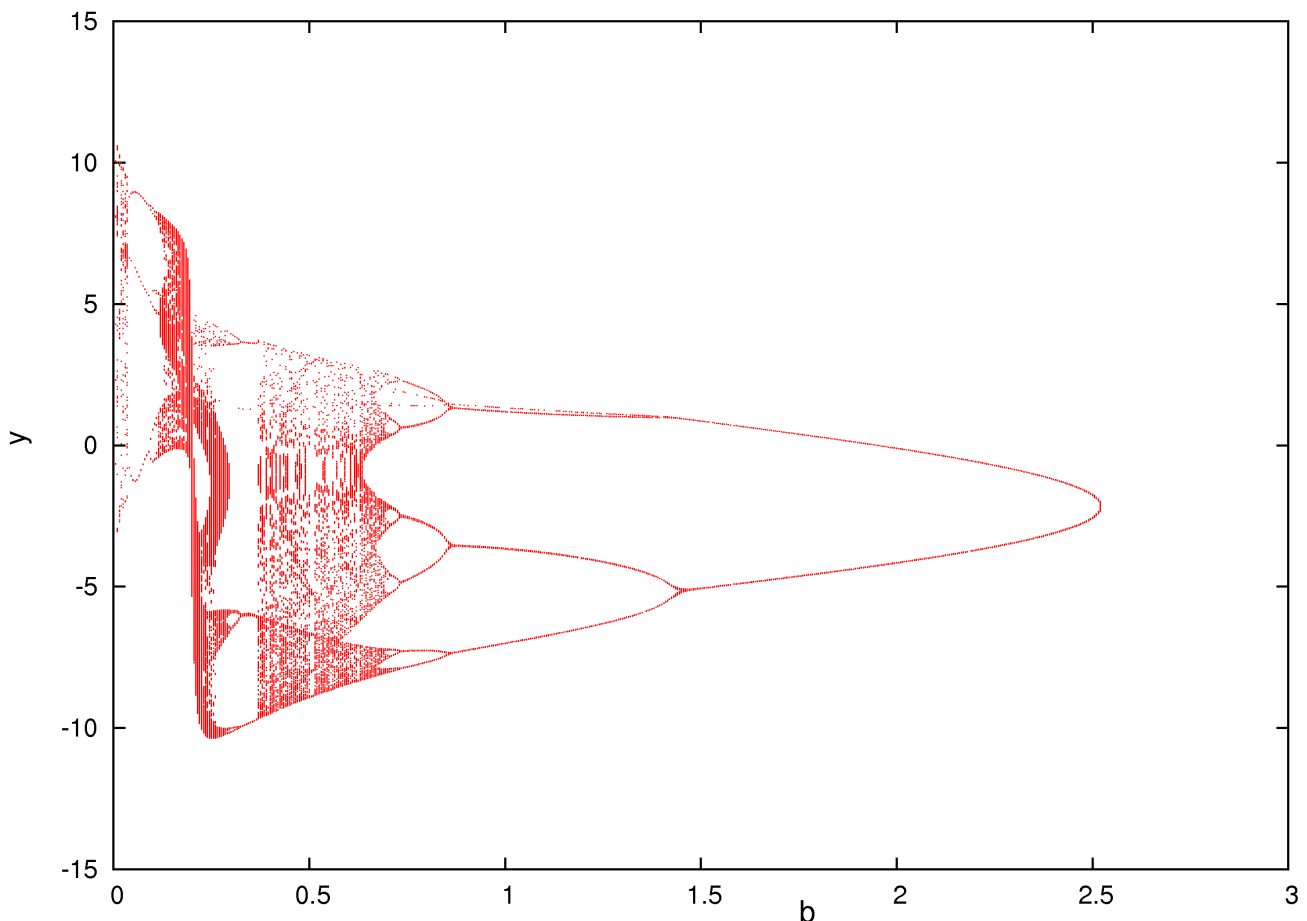


Figura 13: diagrama de bifurcaciones para el atractor de Rössler al variar b

Se ha presentado el diagrama de bifurcaciones para la coordenada y , dado que en este caso fue para la coordenada en la cual mayor definición tenía el diagrama. Este gráfico nos presenta mucha información. Primero, se ve que para valores de b pequeños (entre 0 y 0.6, aproximadamente), el sistema se comporta de forma caótica (esto se concluye debido a la nube de puntos presentes en este intervalo de tiempo). A medida que b crece, se pueden diferenciar tramos del diagrama en los cuales se

nota explícitamente la pérdida del régimen caótico y la reducción del período de las órbitas. Por ejemplo, para valores de b mayores a 1.5 se tienen órbitas de período 2, mientras que para valores de b menores se tienen órbitas de período mayor. Personalmente hubiese esperado encontrar no sólo que al crecer b decreciera el carácter caótico del comportamiento del sistema, sino que, en el caso del gráfico mostrado, para valores de b mayores a 2.5 se hubiesen obtenido órbitas de período 1. La ausencia de dichas órbitas en este diagrama pueden deberse a una falla en el algoritmo usado.

2.4b Variando c .

Se procede ahora a realizar el mismo procedimiento que para la obtención del diagrama de bifurcaciones del sistema al variar b , pero variando ahora el parámetro c . Para este caso se han fijado los parámetros $a=b=0.1$ y se comienza a variar el parámetro c , en el intervalo entre $c=0$ y $c=6$, con pasos de $c+=0.0025$. El valor de epsilon se ha tomado como $\epsilon=0.0005$ para este caso. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 14 y 15. La figura 14 muestra el diagrama para la coordenada y , mientras que la figura 15 muestra el diagrama obtenido para la coordenada z . Se han presentado ambos por una razón de definición. Es apreciable que en la figura 14 puede verse el diagrama con mayor definición que en la figura 15.

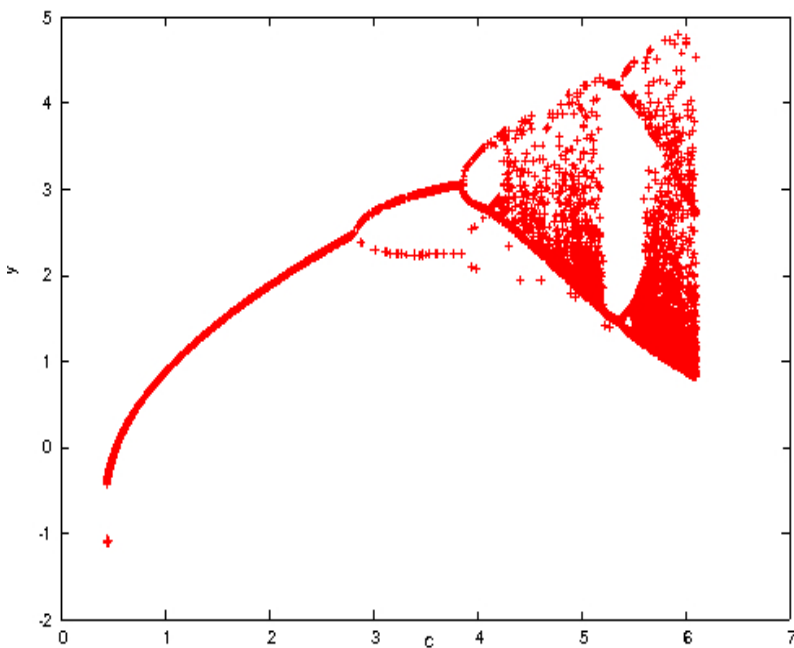


Figura 14: diagrama de bifurcaciones para el sistema de Rössler al variar el parámetro c (coordenada y)

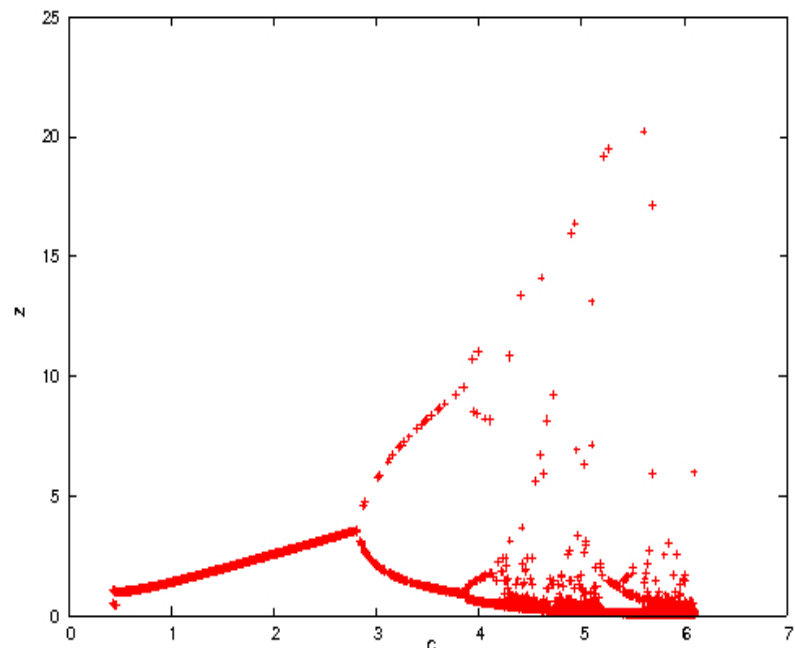


Figura 15: diagrama de bifurcaciones para el sistema de Rössler al variar el parámetro c (coordenada z)

¡Estos resultados son sorprendentes! O al menos a mí me sorprendieron....

¿Por qué? Porque esto se relaciona más directamente con lo que se vio en la sección 2.3. Es consistente con los cambios vistos al variar el parámetro c y a la obtención de órbitas periódicas como las que se tenían. Recordemos: para un valor de $c=2.5$ se tenía una órbita de período 1. Mirando detenidamente los diagramas presentes en las figuras 14 y 15 vemos que esto tiene sentido, debido a la existencia de una sola rama en el diagrama de bifurcaciones.

Y... para un valor de $c=3.5$ se obtenía una órbita de período 2. ¡Y para ese valor del parámetro c tenemos dos ramas en el diagrama de bifurcaciones!.

Para $c=4$ teníamos una órbita de período 4 como solución estacionaria. Si se mira detenidamente la figura 14 se puede ver que cerca del parámetro $c=4$ se produce una duplicación del período nuevamente (de período 2 a período 4). Se puede observar lo mismo en la figura 15, aunque se aprecia

sólo la bifurcación de abajo (por alguna razón el diagrama no quedó con mucha resolución para las ramas de arriba).

Y por último, podemos ver que para valores de c cercanos a 4.5 el sistema comienza a comportarse caóticamente, con lo cual la aparición de órbitas de períodos mayores no queda tan evidente como para las que se marcaron anteriormente. Pero, cabe notar que anteriormente teníamos comportamiento caótico para un valor de $c=5$ (figura 5), y que los diagramas aquí presentados también son consistentes con esto.

También se puede decir que, en contraposición con el parámetro b , aumentar el valor de c hace tender al sistema a un comportamiento caótico, mientras que para b se tenía lo contrario, como se mostró en la sección anterior.

2.5 El problema que dejamos de lado.

En la sección 2.4 planteamos que ante un comportamiento caótico, si se deja evolucionar al sistema suficiente tiempo, entonces seguramente habrá intervalos de tiempo en los cuales las trayectorias que se tengan sean trayectorias muy similares a las mostradas en la sección 2.3. Retomemos esto ahora, luego de haber visto los respectivos diagramas de bifurcaciones del sistema, donde estudiamos levemente el *onset* del comportamiento caótico y los cambios en los períodos de las órbitas en función de los parámetros b y c .

Ahora lo que se quiere es estudiar, dentro de un sistema del tipo Rössler con comportamiento caótico, la coexistencia de las órbitas que se vieron en la sección 2.3 y que forman parte intrínseca de la estructura del atractor que estamos estudiando.

Para este estudio volvemos los parámetros a, b y c a sus valores originales (como se presentó en la sección 2.3: $a=b=0.2$ y $c=5$).

Lo que se quiere estudiar son los *retornos cercanos* dentro de la señal temporal de alguna de las variables. Se quieren extraer órbitas cuasi-periódicas de período 1, 2 y 4 para comenzar el estudio y terminar de comprobar la convivencia de las órbitas durante el comportamiento caótico. Para esto se implementó un algoritmo que, dado un tiempo inicial t_0 , comparase el valor de la variable de la serie temporal con el valor de la señal en otro tiempo t , en una ventana temporal de aproximadamente 50 segundos, comenzando en t_0 . Si el algoritmo encuentra un punto tal que la diferencia entre el valor de la señal para t y el valor de la señal a t_0 es menor que un epsilon, y que la diferencia entre las pendientes también es menor al mismo epsilon (esto ayuda a eliminar mucha información basura en señales como la que se está estudiando, donde conviven tramos de distinta “periodicidad”), entonces guarda la información de a qué tiempo encontró el punto, y la distancia que hay entre el tiempo t del punto hallado y t_0 . Esto permite ver gráficamente, en qué intervalos temporales la señal se parece mucho a una señal periódica, representado en el gráfico $|t-t_0|$ vs t como el segmento de una recta horizontal. La figura 16 es un ejemplo de la implementación de este algoritmo, donde se muestra la mitad superior de la señal temporal en la parte inferior del gráfico, y el resto es un diagrama típico de *retornos cercanos*. Se han marcado líneas verticales que muestran tramos semi-periódicos de período T1 y T2, respectivamente. El valor de estos períodos está dado por la diferencia $|t-t_0|$. Una vez analizado este diagrama, se extrae de la tabla de datos generada por la integración numérica del sistema los datos correspondientes al intervalo de tiempo deseado y se los grafica para ver la órbita cuasi-periódica en cuestión.

Utilizando el mismo algoritmo, se extrajo del archivo que contiene los datos de la integración numérica del Rössler los datos correspondientes a los intervalos de tiempo en los cuales se tienen órbitas cuasi-periódicas. Las figuras 17, 18, 19 y 20 son las órbitas extraídas de “períodos” 1, 2, 4 y 8, respectivamente.

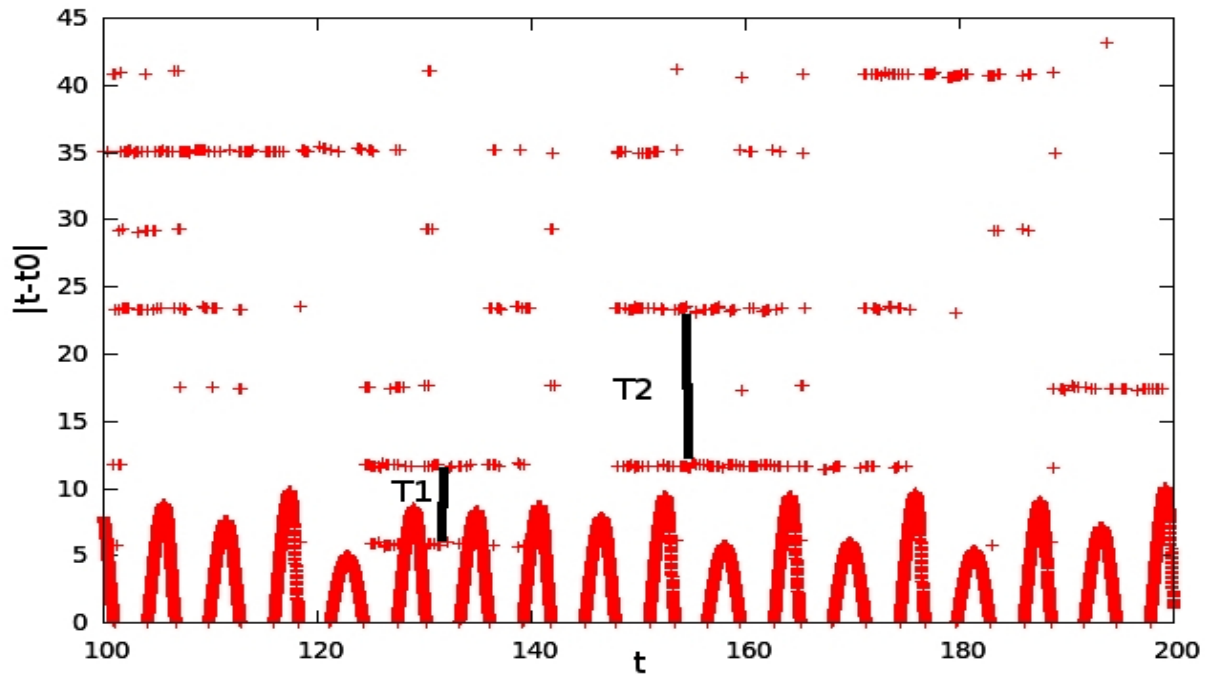
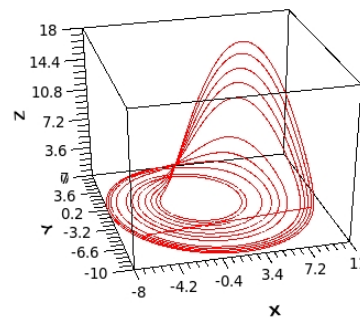
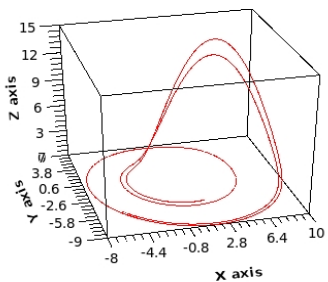
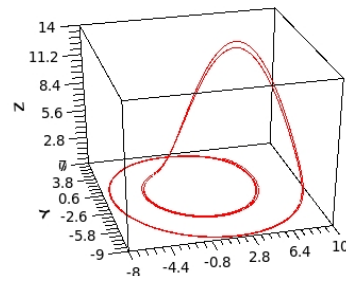
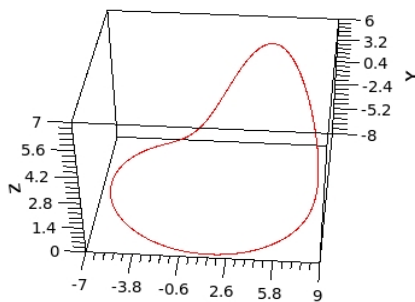


Figura 16: Ejemplo de implementación del algoritmo para obtener tramos de órbitas cuasi-periódicas. Se han marcado dos tramos en los cuales la señal tiene periodo $T1$ (periodo 1) y $T2$ (periodo 2), respectivamente. Se han superpuesto el diagrama obtenido con parte de la señal temporal, donde se puede ver explícitamente lo representado en el diagrama.



De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: Figura 17 (periodo 1), Figura 18 (periodo 2), Figura 19 (periodo 4) y figura 20 (periodo 8). Las órbitas de periodo 1 y periodo 8, respectivamente, son, hasta donde puede apreciarse, periódicas. Las de periodo 2 y 4 son cuasi-periódicas. Esto demuestra la coexistencia de las órbitas de distintos periodos como parte estructural del sistema cuando la evolución es caótica.

Del estudio realizado en esta sección se comprueba lo expuesto antes, que las órbitas de distintos períodos forman parte de la estructura intrínseca del atractor y, por lo tanto, al tener comportamiento caótico como se tiene en estas simulaciones, vemos que hay intervalos temporales en los cuales el sistema pasa cerca de órbitas de distintos períodos, con lo cual, estas órbitas coexisten y es por ello que tenemos las figuras 17, 18, 19 y 20.

La pregunta ahora es ¿cómo coexisten?, y para ello graficamos en un mismo sistema de ejes las órbitas de período 1 y período 2 extraídas del atractor caótico.

La figura 21 es la proyección xy de dicho gráfico, mientras que la figura 22 muestra las órbitas en tres dimensiones. Puede apreciarse que la órbita de período 2 forma una cinta de Moebius alrededor de la órbita de período 1. De esta manera las órbitas pueden coexistir, sin tocarse, dentro del atractor caótico.

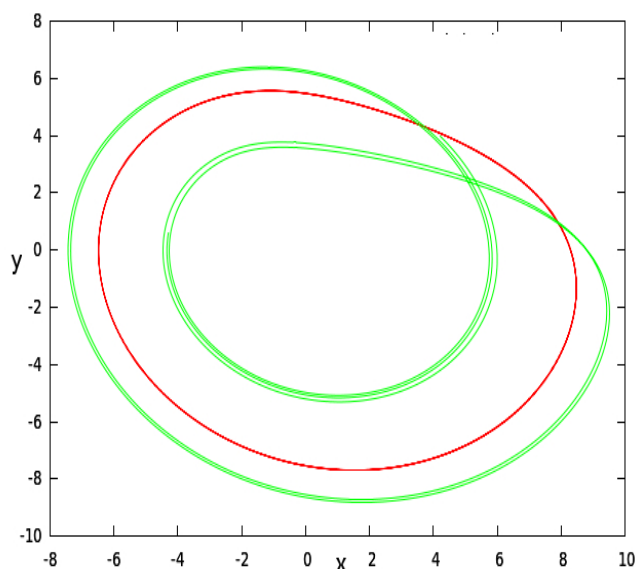


Figura 21: sección xy del gráfico de las órbitas de período 1 y período 2 del atractor caótico

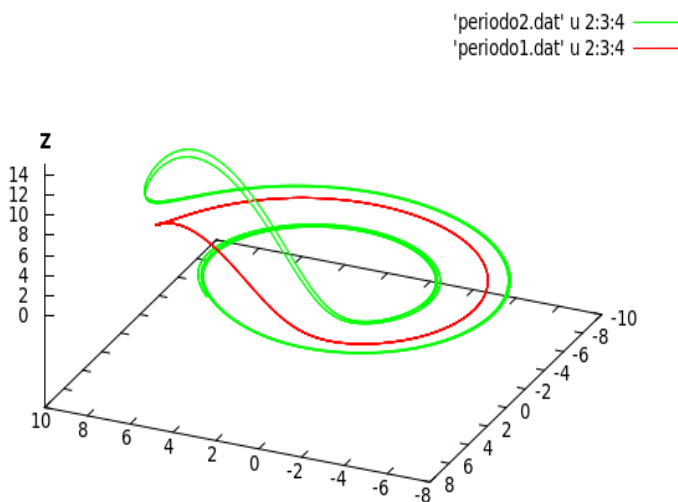


Figura 22: Gráfico tridimensional de las órbitas de período 1 y período 2 del atractor caótico. Puede apreciarse que la de período 2 envuelve a la de período 1, como si fuera una cinta de Moebius

Para mostrar que este comportamiento observado es característico del sistema en estado caótico, se grafican ahora las soluciones estacionarias de período 1 y período 2 (obtenidas para $c=2.5$ y $c=3.5$, respectivamente) en un mismo sistema de ejes. Notemos que hay una diferencia sustancial entre la figura 22 y la figura 23. Mientras que en la figura 22 se pudo ver cómo la solución de período 2 envuelve a la solución de período 1, ahora se puede apreciar en la figura 23 que esto no sucede. Ambas órbitas comparten parte del recorrido (cuando el movimiento es plano, cerca del origen) y podría verse como si la órbita de período 1 está ahora “contenida” en la órbita de período 2. Es debido a esto que para valores de c menores a los cuales se tiene comportamiento caótico, las trayectorias de período 1 y período 2 no aparecen en forma simultánea como soluciones posibles del sistema.

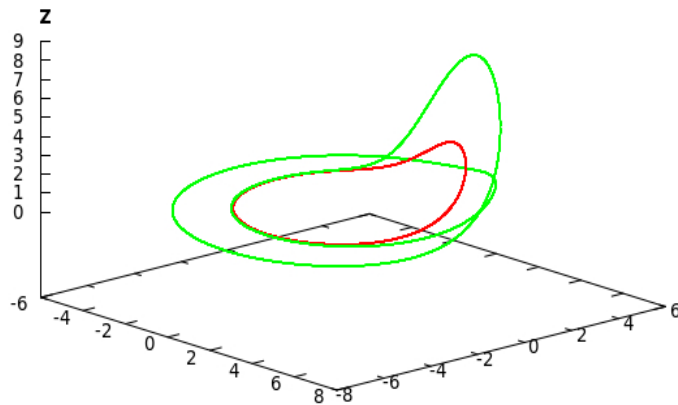


Figura 23: soluciones estacionarias de periodo 1 y periodo 2 superpuestas

2.5b Órbitas periódicas en el atractor de Lorenz

Utilizando el mismo algoritmo de retornos cercanos se extrajeron órbitas periódicas para el atractor de Lorenz, manteniendo los parámetros y condiciones iniciales utilizados en la sección 1. ¿Cómo definir período para el Lorenz? Aquí se ha tomado como órbita de período 1 aquella que recorre los dos focos y, tras una “vuelta”, regresa al mismo punto, y como órbita de período 2 aquella que del foco A va hacia el foco B, recorre dos vueltas en el foco B y luego regresa al punto de partida cercano al foco A. Ilustremos esto con imágenes. Las figuras 24 y 25 muestran las proyecciones en xz de las órbitas de período 1 y período 2 obtenidas para el atractor de Lorenz, utilizando el algoritmo de *retornos cercanos*.

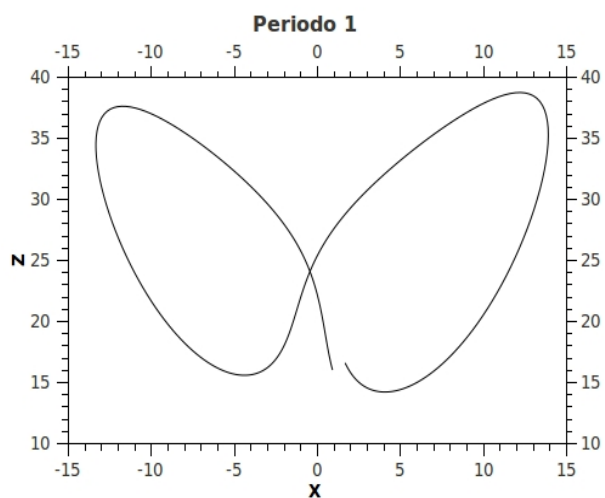


Figura 24: órbita cuasi-periódica de período 1 para el atractor de Lorenz

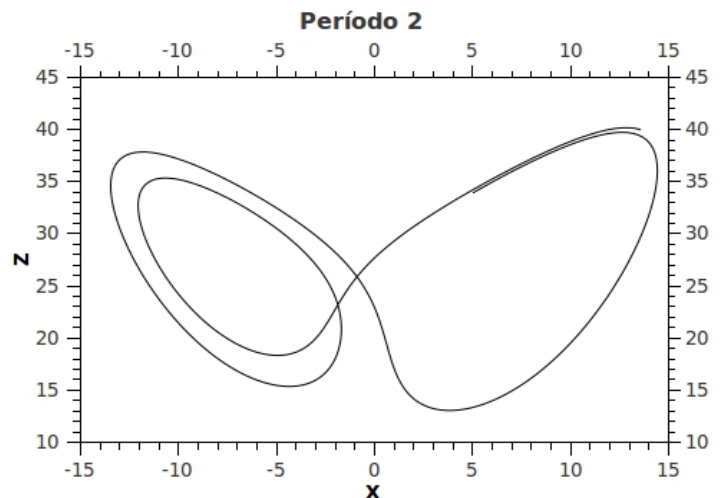


Figura 25: órbita cuasi-periódica de período 2 para el atractor de Lorenz

Si bien a simple vista estas órbitas parecen fundamentalmente distintas de las órbitas obtenidas para el atractor de Rössler, una mirada más cercana, con ayuda de un poco de imaginación, podría recordarnos a los resultados que ya obtuvimos para las órbitas de período 1 y período 2 del Rössler. Donde esto se nota más, quizás, sea en la órbita de período 2 mostrada en la figura 25. Esta figura hace recordar a la figura 11. Si analizamos detenidamente la figura 25, notamos que desde el punto A (ubicado a aprox 12,5 en x y 40 en y) la trayectoria va hacia el foco de la izquierda, da una vuelta “interior” y sale “hacia afuera”, terminando de envolver la parte “interior” de la trayectoria para volver al foco del que salió y terminar muy cerca del punto de partida. Es el mismo comportamiento que se tiene para la órbita de período 2 del Rössler, si pensamos que el punto A es el punto máximo en z , entonces vemos que la trayectoria disminuye en z hasta tener un movimiento cuasi-planar para valores de las coordenadas cercas del origen, da una vuelta “interior”, luego sale y la parte “exterior” de la trayectoria envuelve a la parte “interior” hasta que comienza a aumentar el valor de z para reinyectarse sobre el punto de partida.

Conclusiones

Se pudo estudiar satisfactoriamente, mediante la implementación de simulaciones numéricas, los atractores de Lorenz y Rössler. Se vio la divergencia de trayectorias en el Lorenz para condiciones iniciales muy cercanas, se estudió el atractor de Rössler variando sus parámetros para obtener tanto los diagramas de bifurcaciones como las órbitas periódicas del sistema. También se vio la coexistencia de órbitas de distintos períodos para cuando el atractor extraño tiene comportamiento caótico y, por último, se realizó una breve comparación entre las órbitas periódicas de período 1 y período 2 para ambos atractores.