

Guia de simulaciones numéricas - Dinámica no lineal

Marcelo A. Luda

10 de junio de 2011

Resumen

Se estudiaron los atractores de Lorenz y de Rossler integrando numéricamente las ecuaciones diferenciales de cada uno y analizando los datos a través de los gráficos y mapas que se presentan.

1. Problema 1: Atractor de Lorenz

Se estudió el atractor de Lorenz a partir de las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= \mu x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - 8z/3\end{aligned}\tag{1}$$

Se estableció la constante $\mu = 28$.

1.1. Ítem (a)

Se integraron numéricamente las ecuaciones para condiciones iniciales muy similares. En la figura 1 se puede apreciar como para valores iniciales muy cercanos las soluciones divergen en poco tiempo. Esto es característico de los sistemas caóticos y es el principal obstáculo para realizar predicciones precisas a largo plazo. La imposibilidad de realizar predicciones determinísticas no implica, de todos modos, que no se puedan hacer otros estudios al sistema que permitan realizar predicciones o descripciones cualitativas.

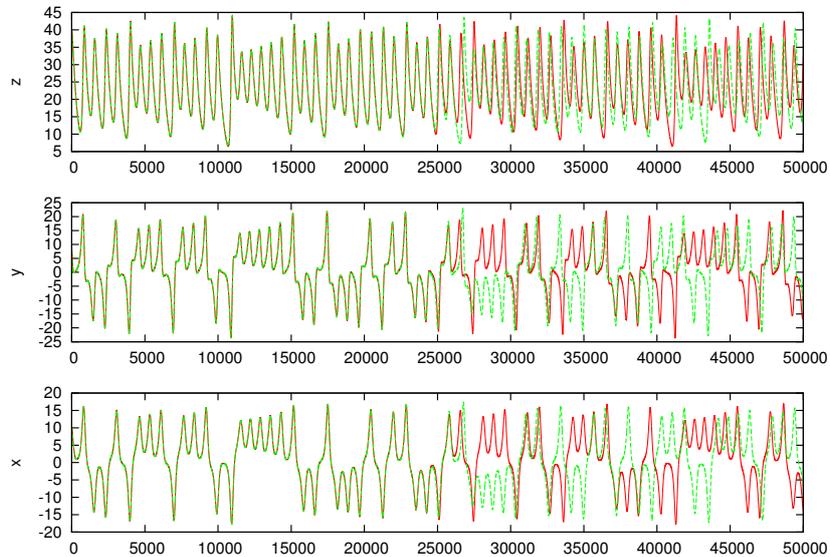


Figura 1: Coordenadas vs Tiempo. Se aprecia la divergencia de los resultados obtenidos al integrar con condiciones iniciales muy parecidas. El gráfico en rojo corresponde a $x(0) = 10$ y el verde a $x(0) = 10,0000000001$.

1.2. Ítem (b)

En la figura 2 se puede apreciar el atractor de Lorenz, desde su proyección en xy y en perspectiva.

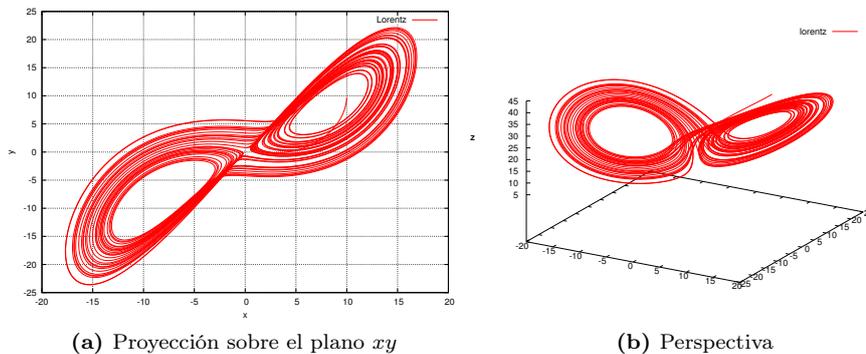


Figura 2: Atractor de Lorenz

2. Problema 2: flujo caótico

Para estudiar los flujos caóticos, vamos a utilizar bastante el sistema de Rossler. Se integró numéricamente las siguientes ecuaciones diferenciales para obtener gráficos del sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y - z \\
\dot{y} &= x + 0,2y \\
\dot{z} &= 0,2 + z(x - c)
\end{aligned}
\tag{2}$$

2.1. Ítem (a)

En la figura 3 se pueden ver los gráficos resultantes de integrar las ecuaciones 2 para diferentes valores de c .

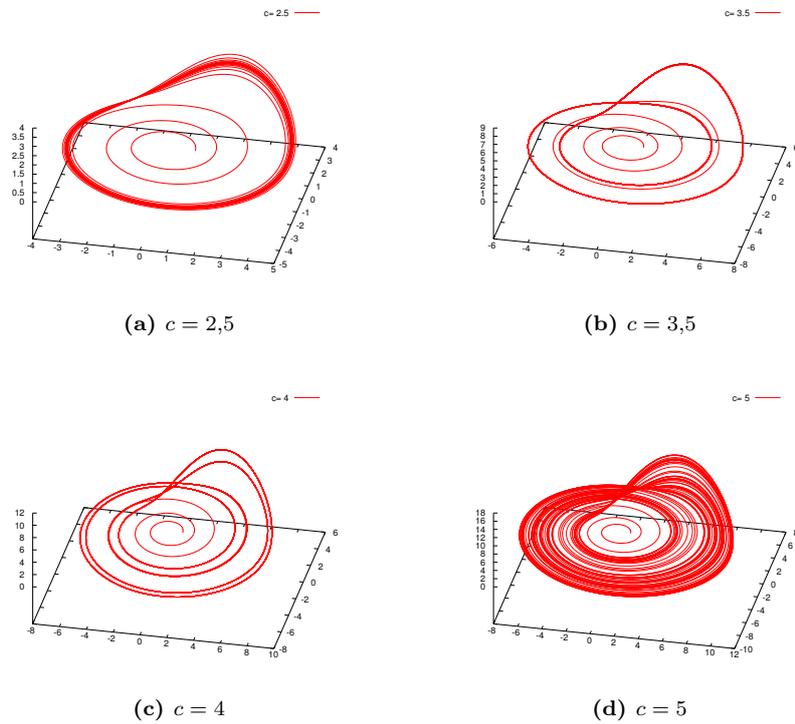


Figura 3: Sistema de Rossler para diferentes valores de c

Estudiamos el sistema como un oscilador en las coordenadas x e y . Es conveniente pensar en coordenadas cilíndricas para definir como periodo el tiempo que se tarda en dar una vuelta completa en torno al eje z . Esta definición no es estricta, ya que los tiempos no son iguales para cada vuelta, pero nos da una idea intuitiva sobre como clasificar los ciclos, donde los ciclos que se repiten cada 1 vuelta son de periodo 1, los que se repiten luego de 2 vueltas son de periodo 2, etc. En el caso $c = 2,5$, el sistema se estabiliza tendiendo a una órbita cerrada de periodo 1. El de $c = 3,5$, el sistema se estabiliza tendiendo a una órbita cerrada de periodo 2. El de $c = 4$, el sistema se estabiliza tendiendo a una órbita cerrada de periodo 4.

Para el caso $c = 5$ se entra en un régimen caótico. Para un estudio pormenorizado de este sistema es conveniente utilizar mapas de Poincaré.

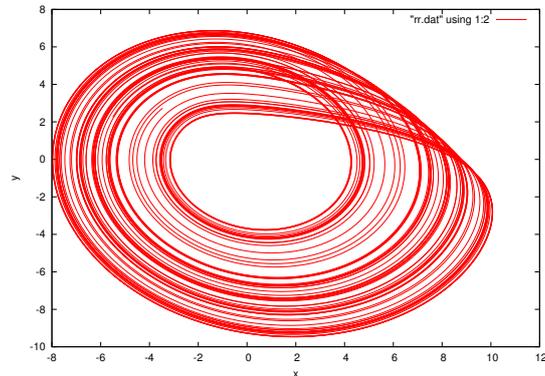


Figura 4: Proyección del sistema Rossler con $c = 5$ sobre el plano xy

2.2. Ítem (b)

Para estudiar el régimen caótico del sistema de Rossler construimos mapas de pointcaré correspondientes a diferentes planos que contienen a z y forman algún ángulo con el eje x (figura 5).

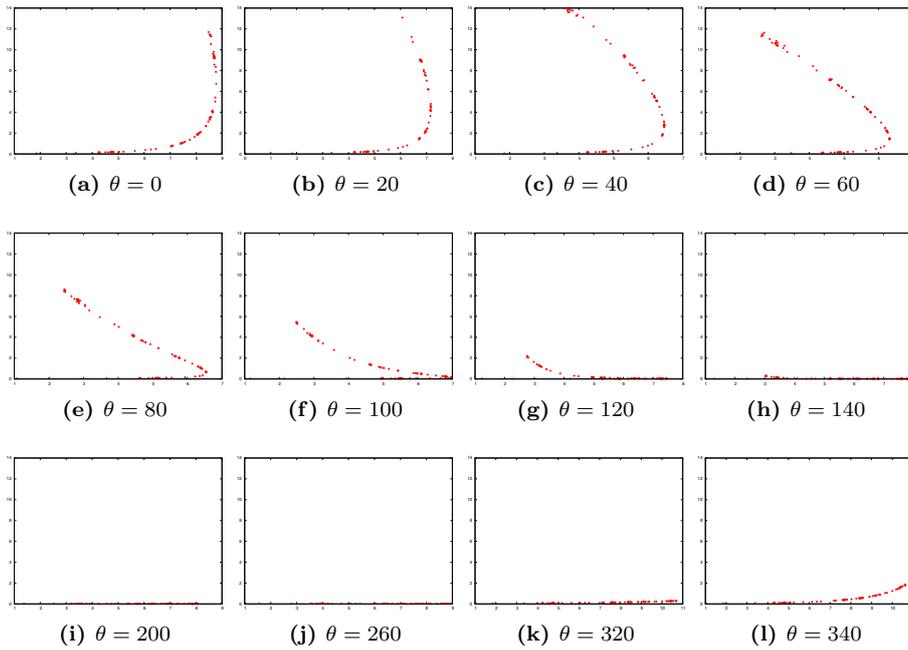


Figura 5: Mapas de Pointcaré para el sistema de Rossler con $c = 5$ en diferentes planos. Los planos contienen al eje z y forman un ángulo θ con el eje x .

Se puede apreciar como la evolución del flujo a medida que recorre un ciclo. Tiene muchas similitudes con el sistema de la herradura de Smale. El flujo se estira y se dobla sobre sí mismo hasta que se superponen las dos partes de la “herradura”. Por analogía, es esperable que entre las posibles órbitas cerradas o

“casi cerradas” se hallen algunos ciclos con propiedades topológicas similares a los de la herradura de Smale.

2.3. Ítem (c)

El sistema caótico, en su evolución, pasa muy cerca de las órbitas que perdieron su estabilidad al variar el parámetro c . Para evidenciar esto se buscaron órbitas “casi cerradas” en el sistema caótico para diferentes periodos y se las comparó con las órbitas estables de los sistemas correspondientes a otros valores de c . Se pueden ver los resultados para órbitas de periodo 1 (figura 6), órbitas de periodo 2 (figura 7) y órbitas de periodo 4 (figura 8).

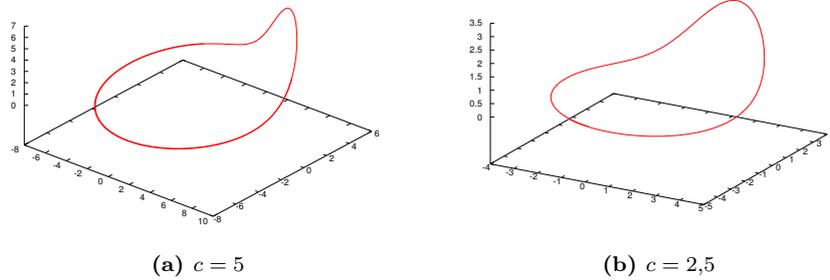


Figura 6: Comparación de un extracto de periodo 1 que “casi se cierra” del sistema de Rossler Caótico con la solución estable para el $c = 2,5$

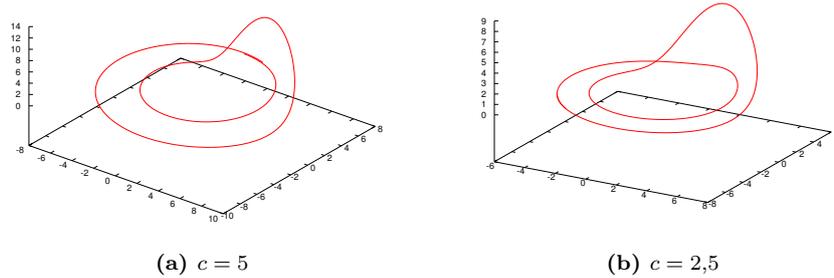


Figura 7: Comparación de un extracto de periodo 2 que “casi se cierra” del sistema de Rossler Caótico con la solución estable para el $c = 3,5$

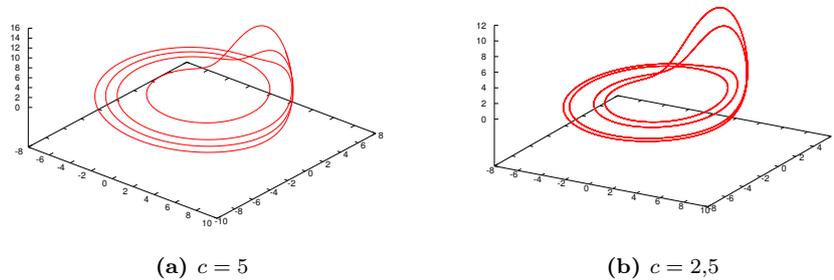


Figura 8: Comparación de un extracto de periodo 4 que “casi se cierra” del sistema de Rossler Caótico con la solución estable para el $c = 4$

2.4. Ítem (d)

Para estudiar la topología asociada a las órbitas se graficaron las órbitas estables provenientes de los sistemas con $c = 2,5$ y $c = 3,5$ en la figura 9b, y las órbitas “casi cerradas” extraídas del sistema caótico en la figura 9a.

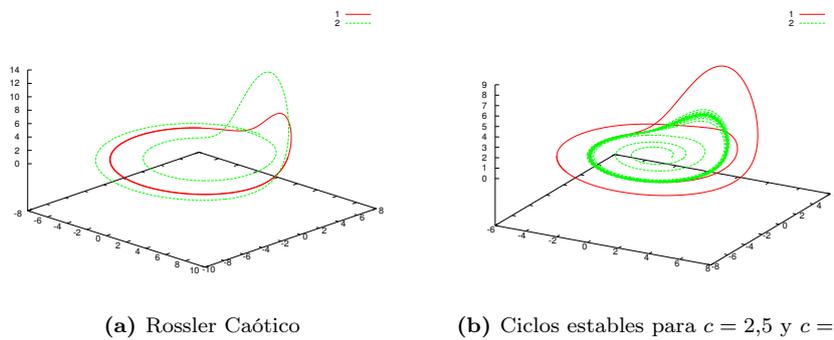


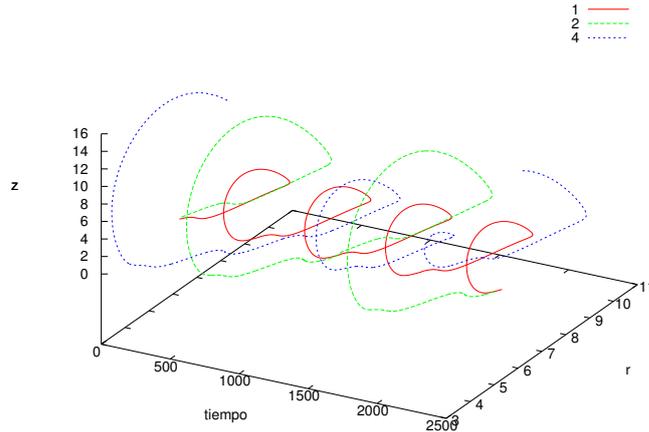
Figura 9: Comparación de la relación topológica entre los ciclos estables del sistema de Rossler para $c = 2,5$ y $c = 3,5$, y los ciclos “casi cerrados” de periodos 1 y 2 del Rossler Caótico

En la herradura de Smale hay dos órbitas cerradas de periodo 1: una asociada al punto fijo y otra que al hacer un ciclo vuelve sobre si misma. La segunda está rodeada por la única órbita de periodo 2 del sistema de forma análoga a una cinta de Moebius. La primera no está rodeada por la de periodo 2.

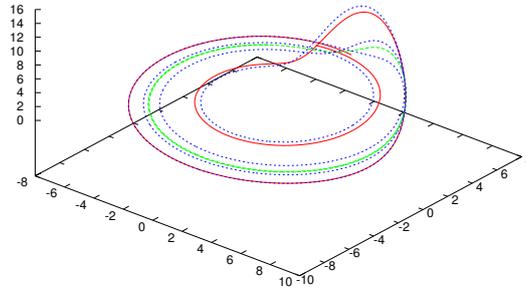
En la figura 9a se puede apreciar como la órbita de periodo 2 forma los bordes de una cinta de moebius alrededor de la de periodo 1. Esta es una de las soluciones esperables según la analogía con la herradura de Smale. En la figura 9b, en cambio, la orbita de periodo 2 que sigue un comportamiento análogo a la cinta de Moebius no rodea en ningún momento a la de periodo 1.

Se puede ver cómo la analogía con el sistema de la herradura de Smale es correcta. Cabe destacar que la órbita estable de periodo 1 del sistema con $c = 2,5$

no puede evolucionar nunca con la variación continua de c para convertirse en la órbita de periodo 1 de a figura 9a. Esto se debe a que tiene características topológicas diferentes. Para poder “ingresar” a la cinta de Moebius, las órbitas deberían necesariamente cruzarse, lo que está prohibido porque destruye la evolución determinística.



(a) Evolución temporal



(b) Órbitas en 3D

Figura 10: Evolución del flujo para las órbitas “casi cerradas” de periodos 1, 2 y 4 del sistema de Rossler Caótico

Para hacer un estudio completo de la topología del sistema de Rossler caótico se deberían estudiar también órbitas de periodo 3, 4, etc. A modo ilustrativo, en la figura 10 se muestra como se “enroscan” entre sí las órbitas de periodo 1, 2 y 4 extraídas del sistema con $c = 5$.

2.5. Ítem (e)

Para poder comparar el atractor de Rossler con el de Lorenz, se repitió el procedimiento para extraer del segundo órbitas de diferentes periodos y analizar su comportamiento. En la figura 11 se pueden apreciar dos órbitas “casi cerradas” halladas.

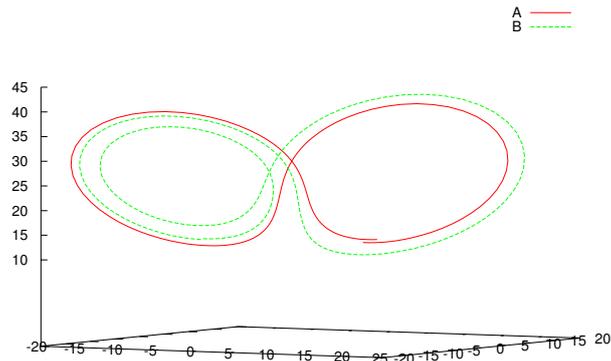


Figura 11: Extractos de ciclos “casi cerrados” del sistema de Lorenz

La principal dificultad para el análisis consiste en determinar donde empieza y termina un ciclo. Una posibilidad es definir que los ciclos comienzan y terminan al atravesar el plano $y = -x$ en una dirección particular. Esto nos separa un “ala” de la otra en el sistema (ver figura 2a). Si construimos un mapa sobre ese plano obtenemos la figura 12. Bajo estas consideraciones, las órbitas graficadas en la figura 11 son de periodo 1. Se puede apreciar como estas órbitas están “enroscadas” entre sí, lo que lo diferencia, en primera instancia, de la topología del atractor de Rossler.

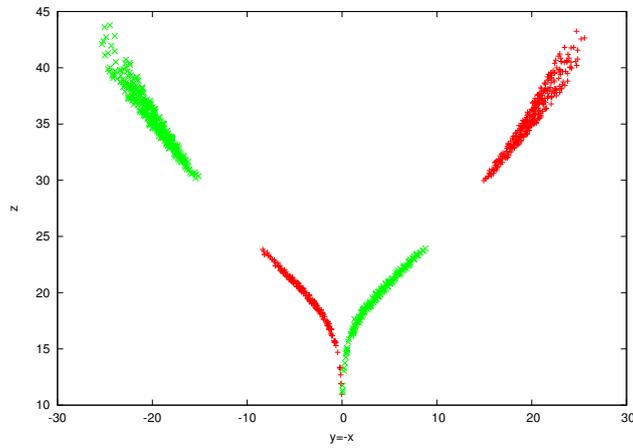


Figura 12: Mapa para el sistema de Lorenz sobre el plano $y = -x$. Los puntos rojos ingresan al plano y los verdes salen del plano.

2.5.1. Extra

Lorenz propuso que los máximos locales de la coordenada z definen cual va a ser la altura (máximo local) siguiente. Esto es, en la figura 1, los picos del gráfico de la coordenada z cumplen una relación entre cada uno y el siguiente. Esto está en toda la bibliografía tradicional sobre el tema. Graficando z_{n+1} vs z_n se puede verificar esta relación (figura 13).

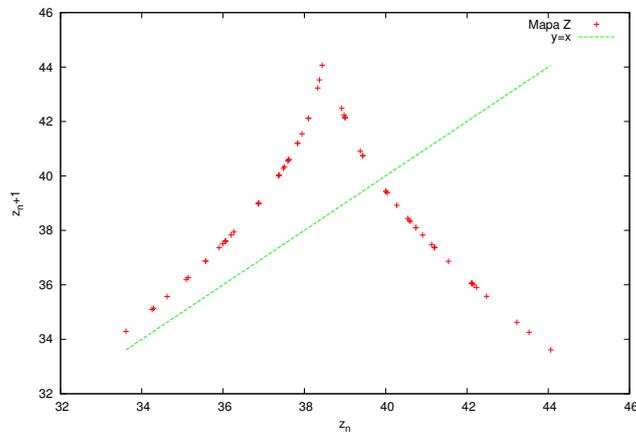


Figura 13: Relación entre los máximos locales z_n de la coordenada z con sus inmediatos siguientes z_{n+a}