Dinámica No lineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 1 - Flujos unidimensionales.
1er cuatrimestre 2010

Problema 1: Analice las siguientes ecuaciones gráficamente. En cada caso haga un dibujo del campo vector, encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de $x(t)$ para distintas condiciones iniciales. Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para $x(t)$; si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada.

(a) $\dot{x} = 4x^2 - 16$
(b) $\dot{x} = x - x^3$
(c) $\dot{x} = 1 + 0.5\cos x$
(d) $\dot{x} = e^x - \cos x$ (hint: grafique e^x y $\cos x$ en el mismo gráfico y busque las intersecciones. No se pueden encontrar los puntos fijos analíticamente, pero si puede explicar el comportamiento cualitativo)
(e) $\dot{x} = 1 - x^{14}$
(f) $\dot{x} = e^{-x}\sin x$
(g) $\dot{x} = 1 - 2\cos x$

Problema 2: Resuelva la ecuación logística $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ para una condición inicial arbitraria N_0. Hint: use un cambio de variables $x = 1/N$.

Problema 3: El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz $\dot{N} = -aN\ln(bN)$, donde $N(t)$ es proporcional al número de células en el tumor y $a, b > 0$ son parámetros.

(a) Interprete a y b biológicamente.
(b) Dibuje el campo vector y luego grafique $N(t)$ para varias condiciones iniciales.

Problema 4: Use estabilidad lineal para clasificar los puntos fijos de los siguientes sistemas. Si la estabilidad lineal falla porque $f'(x^*) = 0$, use un argumento gráfico para demostrar estabilidad.

(a) $\dot{x} = x(1 - x)$
(b) $\dot{x} = x(1 - x)(2 - x)$
(c) $\dot{x} = \tan x$
(d) $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$
(e) $\dot{x} = ax - x^3$, donde a puede ser positivo, cero, o negativo. Discuta todos los casos.
(f) $\dot{x} = x^2(6 - x)$
(g) $\dot{x} = \ln x$

Problema 5: Usando estabilidad lineal, clasifique todos los puntos fijos del modelo de Gompertz de crecimiento de tumores $\dot{N} = -aN\ln(bN)$.

Problema 6: En mecánica estadística existe el fenómeno de *critital slowing down*, una característica de una transición de fases de segundo orden. En la transición, el sistema se relaja a un equilibrio mucho mas lento que lo usual. Acá hay una versión matemática del mismo efecto:

(a) Obtenga una solución analítica para $\dot{x} = -x^3$ para una condición inicial arbitraria. Muestre que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, pero el decaimiento no es exponencial.

(b) Para obtener una intuición sobre la "lentitud" del decaimiento, compare la evolución temporal de la solución anterior con la solución de $\dot{x} = -x$.

Problema 7: Una partícula viaja en $x \geq 0$ con una velocidad dada por $\dot{x} = -x^c$, donde c es real y constante.

(a) Encuentre todos los valores de c tal que el origen $x = 0$ es un punto fijo estable.

(b) Suponga que elige un c tal que el origen es estable. Puede la partícula llegar al origen en un tiempo *finito*? Calcule en función de c, el tiempo que tarda la partícula viajar de $x = 1$ a $x = 0$.

Problema 8: Considere la ecuación $\dot{x} = rx + x^3$, para $r > 0$ fijo. Muestre que $x(t) \to \pm\infty$ en un tiempo finito, comenzando por cualquier condición inicial x_0.

Problema 9: Muestre que el problema de valores iniciales $\dot{x} = x^{1/3}, x(0) = 0$ tiene un número infinito de soluciones. hint: construya una solución que se quede en $x = 0$ hasta un t_0 arbitrario, donde comienza a despegarse.

Problema 10: Para cada uno de los campos vectores siguientes, grafique el potencial $V(x)$ e identifique todos los equilibrios y su estabilidad. Recuerde que el potencial $V(x)$ se define como $\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx}$.

(a) $\dot{x} = x(1 - x)$
(b) $\dot{x} = \sin x$
(c) $\dot{x} = 3$
(d) $\dot{x} = 2 + \sin x$
(e) $\dot{x} = -\sinh x$
(f) $\dot{x} = r + x - x^3$, para distintos valores de r.