Dinámica Nolineal (Cátedra Mindlin)

Guia N° 2 - Flujos bidimensionales y espacio de fases
1er cuatrimestre 2010

Problema 1: Repaso de sistemas lineales
Dado el sistema $\dot{x} = A\,x$, donde $A \in R^{N\times N} = cte$ y $x \in R^N$. Demostrar que $x(t) = A_0\, e^{At}$ es solución del sistema.

Problema 2: **Clasificación de sistemas lineales**
Considere el sistema $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 2x + y$.
(a) Escriba el sistema en forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Muestre que el polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ y encuentre los autovalores.
(b) Encuentre la solución general del sistema.
(c) Clasifique el punto fijo en el origen.
(d) Resuelva el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

Problema 3: Considere el sistema $\dot{x} = -y, \dot{y} = -x$.
(a) Realice un diagrama del campo vector.
(b) Muestre que las trajectorias del sistema son hipérbolas de la forma $x^2 - y^2 = C$. Hint: Muestre que $x\dot{x} - y\dot{y} = 0$ e integre esta ecuación.
(c) El origen es un saddle. Encuentre ecuaciones para sus variedades estables e inestables.
(d) El sistema se puede desacoplar de la siguiente manera. Realice un cambio de variables $u = x + y, v = x - y$, y reescriba el sistema en términos de u, v. Resuelva para $u(t)$ y $v(t)$ dada una condición inicial (u_0, v_0).
(e) Como son las ecuaciones para la variedad estable e inestable en términos de u y v?
(f) Finalmente encuentre la solución general para $x(t)$ y $y(t)$, dada una condición inicial (x_0, y_0).

Problema 4: Considere el sistema $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y$.
(a) Encuentre la matriz A y muestre que tiene autovalores $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$, con autovectores $\mathbf{v_1} = (i, 1)$, $\mathbf{v_2} = (-i, 1)$.
(b) La solución general es $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}$. Reescriba esta expresión usando funciones valuadas en los reales (senos y cosenos).

Problema 5: Dado el sistema $\dot{x} = Ax$, con $A \in R^{2\times 2} = cte$ y $x \in R^2$ se pueden caracterizar todas las soluciones de este sistema a partir de la traza y el determinante de A. Realice un diagrama en el plano $(trA, detA)$ mostrando los comportamientos que se obtienen para las diferentes zonas.

Problema 6: Dibuje el retrato de fase y clasifique los puntos fijos de los siguientes sistemas lineales. Si los autovectores son reales muestrelos en el gráfico.

(a) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -2x - 3y$
(b) $\dot{x} = 5x + 10y, \qquad \dot{y} = -x - y$
(c) $\dot{x} = 3x - 4y, \qquad \dot{y} = x - y$
(d) $\dot{x} = -3x + 2y, \qquad \dot{y} = x - 2y$
(e) $\dot{x} = 5x + 2y, \qquad \dot{y} = -17x - 5y$
(f) $\dot{x} = -3x + 4y, \qquad \dot{y} = -2x + 3y$

Problema 7: Muestre que la matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{b} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$ tiene solo un autoespacio unidimensional correspondiente al autovalor λ. Resuelva el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ y dibuje el retrato de fases.

Problema 8: Considere la ecuación de un circuito RLC, $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$, donde $LC > 0$ y $R \geq 0$.
(a) Reescriba el sistema como de dos dimensiones.
(b) Muestre que el origen es asintóticamente estable si $R > 0$ y neutralmente estable si $R = 0$.
(c) Clasifique el punto fijo en el origen dependiendo si $R^2C - 4L$ es positivo, negativo o cero. Dibuje un retrato de fases para los tres casos.

Problema 9: **Sistemas No-Lineales: Retratos de fases**
Para los siguientes sistemas encuentre los puntos fijos. Dibuje las nulclinas, el campo vector y un posible retrato de fases.
(a) $\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = 1 - e^x$
(b) $\dot{x} = x - x^3, \qquad \dot{y} = -y$
(c) $\dot{x} = x(x - y), \qquad \dot{y} = y(2x - y)$
(d) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = x(1 + y) - 1$
(e) $\dot{x} = x(2 - x - y), \qquad \dot{y} = x - y$

Problema 10: **Retratos de fase utilizando computadoras**
Por medio de integración numérica obtenga retratos de fase para los siguientes sistemas:
(a) (oscilador van del Pol) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x + y(1 - x^2)$
(b) (punto fijo en un dipolo) $\dot{x} = 2xy, \qquad \dot{y} = y^2 - x^2$.
(c) (mounstro de dos cabezas) $\dot{x} = y + y^2, \qquad \dot{y} = -x/2 + y/5 - xy + 6y^2/5$

Problema 11: **Aproximación en series de la variedad estable**
El sistema $\dot{x} = x + e^{-y}, \dot{y} = -y$ tiene un punto fijo y un saddle en (-1,0). La variedad inestable es el eje x, pero su variedad estable es una curva que es más dificil de encontrar.
(a) Sea (x, y) un punto en la variedad estable y asuma que (x, y) está cerca de $(-1, 0)$. Introduzca una nueva variable $u = x + 1$ y reescriba la variedad estable como $y = a_1u + a_2u^2 + O(u^3)$. Para determinar los coeficientes, derive las dos expresiones para dy/dx e igualelas término a término.

(b) Compruebe utilizando una computadora que su resultado analítico produce una curva con la misma forma que la variedad numérica.

Problema 12: **Puntos fijos y linealización**
Para cada uno de los sistemas, encuentre los puntos fijos, clasifiquelos, y dibuje un retrato de fases en un entorno de los mismos. Trate de llenar el espacio en blanco entre los puntos fijos.

(a) $\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = x^2 - 4$
(b) $\dot{x} = \sin y, \qquad \dot{y} = x - x^3$
(c) $\dot{x} = 1 + y - e^{-x}, \qquad \dot{y} = x^3 - y$
(d) $\dot{x} = \sin y, \qquad \dot{y} = \cos x$
(e) $\dot{x} = xy - 1, \qquad \dot{y} = x - y^3$

Para cada uno de los sistemas de arriba realice un retrato de fases usando integración numérica.

Problema 13: Considere el sistema $\dot{x} = y^3 - 4x, \dot{y} = y^3 - y - 3x$.

(a) Encuentre todos los puntos fijos.
(b) Muestre que la linea $x = y$ es invariante (toda trajectoria que comienza en la linea se queda alli.)
(c) Muestre que $|x(t) - y(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$ para todas las trajectorias. Hint: escriba una ecuación diferencial para $x - y$.
(d) Dibuje un retrato de fases.
(e) Con la computadora realice un retrato de fases preciso en el dominio $-20 \leq x, y \leq 20$. Utilice un paso de integración suficientemente pequeño para no tener inestabilidades numéricas. Fijense que las trajectorias parecen acercarse a una curva en $t \to -\infty$. Puede explicar esto intuitivamente y tal vez encontrar una curva aproximada?

Problema 14: **Sensibilidad a términos nolineales** Mostremos un ejemplo donde los términos nolineales pueden cambiar el retrato de fases localmente. Considere el sistema en coordenadas polares $\dot{r} = -r, \dot{\theta} = 1/\ln r$.

(a) Encuentre $r(t)$ y $\theta(t)$ explícitamente.
(b) Muestre que $r(t) \to 0$ y $|\theta(t)| \to \infty$ a medida que $t \to \infty$, entonces el origen es un foco atractor del sistema nolineal.
(c) Reescriba el sistema en coordenadas (x, y).
(d) Muestre que el sistema linealizado cerca del origen es estable pero no foco.

Problema 15: **Estabilidad estructural y conexión saddle** Considere el sistema $\dot{x} = a + x^2 - xy, \dot{y} = y^2 - x^2 - 1$, donde a es un parámetro.

(a) Muestre el retrato de fases para $a = 0$. Muestre que hay una trajectoria que conecta los dos saddles. Esta órbita se denomina *conexión saddle*.
(b) Mediante una computadora si es necesario, vea que para $a \neq 0$ la conexión saddle se rompe. El punto del ejercicio es mostrar que una pequeña perturbación puede modificar la topología del retrato de fases, por lo que se denomina *sistema estructuralmente*

inestable.
El teorema de Peixoto da condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad estructural de un sistema 2D. [OPCIONAL] Cual de las condiciones no se cumple en este caso? (ver Guckenheimer y Holmes, pp.60)

Problema 16: En el siguiente sistema, el origen es un punto fijo no hiperbólico. Discuta la estabilidad del origen para $\epsilon < 0$. AYUDA: Considere la función de Lyapunov $V(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \epsilon x^2 y \end{aligned}$$

Problema 17: En mecánica clásica es habitual estudiar las pequeas oscilaciones de un sistema alrededor de sus equilibrios. Considere el sistema $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ y suponga que $V(q)$ tiene un mínimo en q_0.

(a) Muestre que $(q_0, 0)$ es un punto fijo del sistema

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

(b) Es este punto fijo estable? Discuta la estabilidad de esta solución.

(c) Que ocurre si perturbo esta solución? Muestre que la solucion perturbada queda en un entorno de $(q_0, 0)$