Dinámica No lineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 3 - Bifurcaciones en la linea
1er cuatrimestre 2009

Problema 1: **Bifurcación saddle-node**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación saddle-node ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.
(a) $\dot{x} = 1 + rx + x^2$
(b) $\dot{x} = r - \cosh x$
(c) $\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$
(d) $\dot{x} = r + x/2 - x/(1 + x)$
Cuando se discute la forma normal de la saddle-node se utiliza la suposición que $a = \frac{\partial f}{\partial r}|_{x^* r_c} \neq 0$. Para ver lo que sucede si no se cumple dicha condición haga un dibujo del campo vector de los siguientes ejemplos:
(a) $\dot{x} = r^2 - x^2$
(b) $\dot{x} = r^2 + x^2$

Problema 2: **Bifurcación transcrítica**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación transcrítica ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.
(a) $\dot{x} = rx + x^2$
(b) $\dot{x} = rx - \ln(1 + x)$
(c) $\dot{x} = x - rx(1 - x)$
(d) $\dot{x} = x(r - e^x)$

Problema 3: **Bifurcación pitchfork**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación pitchfork ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.
(a) $\dot{x} = rx + 4x^3$
(b) $\dot{x} = rx - \sinh x$
(c) $\dot{x} = rx - 4x^3$
(d) $\dot{x} = x + \frac{rx}{1+x^2}$

Problema 4: Determine en los siguientes ejercicios el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga que tipo es (incluyendo si corresponde a si es subcrítica o supercrítica), y finalmente dibuje un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r.
(a) $\dot{x} = r - 3x^2$
(b) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$
(c) $\dot{x} = 5 - re^{-x^2}$

(d) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x^2}$
(e) $\dot{x} = x + \tanh(rx)$
(f) $\dot{x} = rx + \frac{x^3}{1+x^2}$

<u>Problema 5:</u> Determine en los siguientes ejercicios el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga que tipo es (incluyendo si corresponde a si es subcrítica o supercrítica), y finalmente dibuje un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r.
(a) $\dot{x} = r - 3x^2$
(b) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$
(c) $\dot{x} = 5 - re^{-x^2}$
(d) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x^2}$
(e) $\dot{x} = x + \tanh(rx)$
(f) $\dot{x} = rx + \frac{x^3}{1+x^2}$

<u>Problema 6:</u> **Pitchfork imperfecta** Considere el sistema $\dot{x} = rx + ax^2 - x^3$, donde $-\infty < a < \infty$. Para $a = 0$ tenemos la forma normal de pitchfork supercrítica. Ahora queremos ver el efecto de perturbar el sistema con un término cuadrático.
(a) ¿Qué simetría se rompe para $a \neq 0$?
(b) Para cada a realice un diagrama de bifurcaciones x^* vs r. A medida que a varía ocurren cambios cualitativos. Encuentre todos los cambios cualitativos que se pueden obtener cambiando a.
(c) Resuma los resultados anteriores dibujando en un diagrama (r, a) los distintos retratos de fases. Bifurcaciones ocurren en las interfases de estas regiones. Identifiquelas.

<u>Problema 7:</u> **Eliminación de términos de orden superior** La teoría de formas normales nos sirve para determinar cuales son los términos *minimos* que debemos retener cercanos a una dada bifurcación. Consideremos el sistema $\dot{X} = RX - X^2 + aX^3 + O(X^4)$, donde $R \neq 0$. Queremos encontrar una nueva variable x tal que el sistema se transforma en $\dot{x} = Rx - x^2 + O(x^4)$ (forma normal de la bif. transcrítica). Esto es una mejora importante en el modelo porque en su nueva forma el modelo carece de términos cúbicos y los términos de error fueron mantenidos a orden cuarto.
Propongamos $x(X) = X + bX^3 + O(X^4)$, donde b se va a identificar apropiadamente para lograr la eliminación del término cúbico original. Esto se llama una *transformación casi-identidad*, porque x y X difieren en muy poco (los términos cuadráticos no son necesarios, por eso no fueron incluidos). Para lograr llegar al sistema transformado realice los siguientes pasos:
(a) Muestre que puede invertir el cambio de coordenadas propuesto, a $X = x + cx^3 + O(x^4)$, y encuentre c.
(b) Calcule la derivada temporal de $x(X)$ y reemplace por $X(x)$ y $\dot{X}(x)$ en el miembro derecho. Expanda la serie resultante y obtenga $\dot{x} = Rx - x^2 + kx^3 + O(x^4)$, donde k depende de a, b y R.
(c) Ahora elija b tal que elimina los términos cúbicos.
(d) Es realmente necesario hacer la suposición que $R \neq 0$?

[OPCIONAL] Ahora que mostramos que se puede eliminar los términos cúbicos, que pasa si llegamos a $\dot{X} = RX - X^2 + a_n X^n + O(X^{n+1})$ y queremos eliminar el orden X^n? Es posible eliminar todos los ordenes que queramos?

ESCALAS DE TIEMPO Y ADIMENSIONALIZACIÓN

<u>Problema 8:</u> **Umbral de un láser.** Usando la mecánica cuántica se puede deducir que el número de átomos exitados N y el número de fotones n en una cavidad resonante se rige por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= GnN - kn \\ \dot{N} &= -GnN - fN + p \end{aligned}$$

G es el parámetro de ganancia de la emisión estimulada, k es el ritmo del decaimiento de los fotones debido a las pérdidas en los espejos, etc., f es el ritmo de decaimiento de la emisión espontánea, y p es la intensidad de bombeo.

(a) Suponga que $N(t)$ relaja extremadamente rápido que $n(t)$. Podemos tomar la aproximación cuasi-estacionaria de $\dot{N} \simeq 0$. Dada esta aproximación, determinar $N(t)$ como funci'on de $n(t)$, y derive una ecuación diferencial de primer orden para $n(t)$. Este procedimiento se conoce también como eliminación adiabática, y uno dice que $N(t)$ es una varible *esclava* de $n(t)$.

(b) Muestre que $n^* = 0$ es inestable para $p > p_c$, donde p_c debe ser determinado.

(c) ¿Qué tipo de bifurcación ocurre en p_c?

(d) (Difícil) ¿Para qué rangos de parámetros es válida hacer la aproximación anterior?

<u>Problema 9:</u> **Singular perturbation** Considere el problema de una bolita enhebrada en un anillo rotante con rozamiento. Compruebe que la ecuación de Newton puede llevarse a la forma adimensional:

$$\epsilon \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{d\phi}{d\tau} = f(\phi)$$

Esta ecuación tiene una solución que relaja rapidamente a la curva donde $\frac{d\phi}{dt} = f(\phi)$.

(a) Estime la escala de tiempo T_{rapido} para este transiente en términos de ϵ, y luego exprese T_{rapido} en términos de las variables dimensionales originales m, g, r, ω, b.

(b) Reescale la ecuación original usando T_{rapido} como la escala para el tiempo característico, en vez de $T_{lento} = b/mg$. ¿Cuáles son los términos despreciables en esta ecuación?

(c) Muestre que $T_{rapido} \ll T_{lento}$ si $\epsilon \ll 1$. En este sentido se dice que *las escalas temporales están muy separadas.*

<u>Problema 10:</u> **Singular perturbation** Considere la siguiente ecuación lineal

$$\epsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

sujeto a la condición $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

(a) Resuelva el problema para todo $\epsilon > 0$.
(b) Suponga que $\epsilon \ll 1$. Muestre que hay dos escalas temporales muy separadas en el problema, y estímelas en términos de ϵ.
(c) Grafique la solución $x(t)$ para $\epsilon \ll 1$, y indique las dos escalas de tiempo en el gráfico.
(d) Que concluye con la validación de reemplazar $\epsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ con su limite singular $\dot{x} + x = 0$
(e) De dos análogos físicos de este problema (uno de circuitos eléctricos y otro mecánico).En cada caso encuentre el parámetro adimensional ϵ y explique el significado físico del limite $\epsilon \ll 1$.

Problema 11: **Reducción de parámetros en la pitchfork subcrítica** El sistema de primer orden $\dot{u} = au + bu^3 - cu^5$ donde $b, c > 0$ son parametros, tiene una bifurcación pitchfork subcrítica en $a = 0$. Muestre que la ecuación puede reducirse los parámetros a

$$\frac{dx}{d\tau} = rx + x^3 - x^5$$

donde $x = u/U$, $\tau = t/T$ y U, T y r tienen que ser determinados a partir de a, b, y c.

APLICACIONES

Problema 12: **Switch bioquímico** Las bandas de las cebras y los patrones de las mariposas con dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Explicar el surgimiento de dichos patrones es un problema abierto en la biología.
Como uno de los ingredientes necesarios para el surgimiento de dichos patrones, Lewis (1979) consideró un ejemplo sencillo de switch bioquímico, donde un gen G se activa por una señal bioquímica S. Por ejemplo, el gen está normalmente desactivado, pero se puede 'prender' para producir un pigmento, u otro producto de los genes cuando la concentración de S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del producto del gen, y asuma la concentración s_0 de S como constante. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2}$$

donde $k_j > 0$ son constantes de reacción. La producción de g es estimulada por s_0 al ritmo k_1, y por una retroalimentación *autocatalitica* o positiva (los términos nolineales). Hay también un término de degradación controlado por k_2.
(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2}$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.
(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

(c) Asuma que inicialmente no hay ningun producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activante se "prende"); qué pasa con $g(t)$? Qué pasa si s vuelve a caer a cero? El producto se "apaga" nuevamente?

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

(hint: vea el Murray (1989) capítulo 15).

Problema 13: **Epidemias** En un trabajo pionero Kermack y McKendrick (1927) propusieron un modelo sencillo para la evolución de las epidemias. Suponga que la población puede dividirse en 3 tipos: $x(t)$ =número de individuos sanos; $y(t)$ =número de individuos infectados; $z(t)$ =número de individuos muertos. Asuma que el total de la población permanece constante, excepto por las muertes de la epidemia. El modelo es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -kxy \\ \dot{y} &= kxy - ly \\ \dot{z} &= ly \end{aligned}$$

donde k y l son constantes positivas. El modelo se basa en

- Los individuos sanos se enferman a un ritmo proporcional al producto de x e y,
- Los enfermos mueren a una tasa l.

El objetivo del ejercicio es reducir este sistema de tercer orden a uno de primer.

(a) Muestre que $x + y + z = N$, donde N es constante.

(b) Use las ecuaciones de $\dot{x}$ y $\dot{z}$ para mostrar que $x(t) = x_0 \exp(-kz(t))/l$, donde $x_0 = x(0)$.

(c) Muestre que z satisface la ecuación de primer orden $\dot{z} = l(N - z - x_0 \exp(-kz/l))$.

(d) Muestre que la ecuación anterior se puede adimensionalizar a

$$\frac{du}{d\tau} = a - bu - e^{-u}$$

(e) Muestre que $a \geq 1$ y $b > 0$.

(f) Determine el número de puntos fijos y clasifíquelos.

(g) Muestre que el máximo de $\dot{u}(t)$ ocurre justo en el mismo momento que el máximo de $\dot{z}(t)$ y $y(t)$. Este tiempo se conoce como el *pico de la epidemia*, y denotado t_{pico}.

(h) Muestre que si $b < 1$ entonces $\dot{u}(t)$ está aumentando en $t = 0$ y llega a un máximo en t_{pico}. Muestre que $\dot{u}(t)$ eventualmente tiende a cero.

(i) En cambio si $b > 1$, $t_{pico} = 0$, y no ocurre la epidemia.

(j) Esta condición se conoce como el umbral de la epidemia. Puede obtener una interpretación biológica de la misma?

(k) Kermack y McKendrick mostraron que su modelo daba un buen ajuste a los datos de la plaga de Bombay 1906. Cómo lo mejoraría para hacerlo más apropiado para el SIDA? Qué suposiciones revisaría?

(hint: ver Murray (1989) capítulo 19).