

## Dinámica No lineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 4 - Bifurcaciones en 2D  
1er cuatrimestre 2010

Problema 1: Para cada uno de los siguientes sistemas encontrar los autovalores como función de  $\mu$ . Dibujar el campo vector para  $\mu = 0$  y  $\mu \neq 0$ . ¿Cuánto valen los autovalores en la bifurcación?

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = \mu - x^2 & \dot{x} = \mu x - x^2 & \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y & \dot{y} = -y & \dot{y} = -y \end{array}$$

Problema 2: Encontrar y clasificar todas las bifurcaciones del sistema:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = y - ax \\ \dot{y} = -by + x/(1+x) \end{array}$$

Problema 3: Sea  $F(q, p) : R^{N \times M} \rightarrow R^N$  un campo vector donde  $q \in R^N$  y  $p \in R^M$ . Muestre que la intersección de nulclinas es condición necesaria para tener una bifurcación local del campo. (la condición no es suficiente, pues la intersección debe ser transversa).

Problema 4: **Gusanos vs. Bosque.** Ludwig propuso un modelo para los efectos de una población de gusanos en un bosque de abetos. Se asume que la condición del bosque está caracterizada por  $S(t)$  (tamaño promedio de los árboles) y  $E(t)$ , reserva de energía (una medida de la salud del bosque). En presencia de una población constante de gusanos  $B$ , la dinámica del bosque está dada por:

$$\begin{array}{l} \dot{S} = r_S S \left( 1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E} \right) \\ \dot{E} = r_E E \left( 1 - \frac{E}{K_E} \right) - P \frac{B}{S} \end{array}$$

donde  $r_S, r_E, K_S, K_E, P > 0$ .

- Interpretar los términos en el modelo biológico.
- Adimensionalizar el sistema.
- Dibujar las nulclinas. Mostrar que si  $B$  es chico hay 2 puntos fijos, y ninguno si  $B$  es grande. ¿Qué tipo de bifurcación ocurre para el valor crítico  $B_c$ ?
- Dibujar el retrato de fases para  $B$  chico y  $B$  grande.

Problema 5: **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema  $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2)$ ,  $\dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$ , donde  $a$  y  $b$  son parámetros ( $0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2$ ) y  $r^2 = x^2 + y^2$ .

- (a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.
- (b) Pruebe que al menos tiene una órbita periódica, y si tiene más de una todas tienen el mismo período  $T(a, b)$ .
- (c) Pruebe que para  $b = 0$  hay solo una órbita periódica.

Problema 6: Estudie el sistema  $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta$ ,  $\dot{\theta} = 1$ .

- (a) Por medio de simulaciones numéricas, vea si existe un un parámetro  $\mu > 0$  crítico donde la órbita periódica desaparece.
- (b) Usando el teorema de Poincaré-Bendixon muestre que hay una órbita periódica en el anulo  $\sqrt{1 - \mu} < r < \sqrt{1 + \mu}$  para todo  $\mu < 1$ .
- (c) Para aproximar la forma de  $R(\theta)$  de la órbita para  $\mu \ll 1$ , asuma una serie de potencias de la forma  $r(\theta) = 1 + \mu r_1(\theta) + O(\mu^2)$ . Sustituya esta solución en la ecuación diferencial  $dr/d\theta$  y aproxime tirando los términos de orden  $O(\mu^2)$ . Obtenga entonces una ecuación diferencial para  $r_1(\theta)$ , y resuélvala. Esta aproximación se conoce como *perturbación regular*.
- (d) Muestre que la solución está dentro del anulo encontrado previamente.
- (e) Compare mediante simulaciones numéricas la solución analítica encontrada y exacta. Como depende el error de  $\mu$ ?

Problema 7: Considere el oscilador de van der Pol  $\ddot{x} + \mu(x^2 - 4)\dot{x} + x = a$ . Encuentre las curvas  $(\mu, a)$  donde ocurre la bifurcación de Hopf.

Problema 8: Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen bifurca Hopf en  $\mu = 0$  y mediante simulaciones numéricas verifique si la bifurcación es sub- o supercrítica.

- (a)  $\dot{x} = y + \mu x$ ,  $\dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$
- (b)  $\dot{x} = \mu x + y - x^3$ ,  $\dot{y} = -x + \mu y + 2y^3$
- (c)  $\dot{x} = \mu x + y - x^2$ ,  $\dot{y} = -x + \mu y + 2x^2$

Problema 9: Considere el sistema predador-presa,

$$\dot{x} = x(b - x - \frac{y}{1+x}), \quad \dot{y} = y(\frac{x}{1+x} - ay) \quad (1)$$

donde  $x, y \geq 0$  son las poblaciones y  $a, b > 0$  son parámetros.

- (a) Dibuje las nulclinas y discuta las bifurcaciones que ocurren si  $b$  cambia.
- (b) Muestre que hay un punto fijo  $x^*, y^* > 0$ , para todo  $a, b > 0$ . Use un método gráfico para esto.
- (c) Muestre que ocurre una bifurcación de Hopf en  $(x^*, y^*)$  si  $a = a_c = \frac{4(b-2)}{b^2(b+2)}$ , donde  $b > 2$ .
- (d) Mediante simulaciones numéricas compruebe el resultado anterior y muestre que la bifurcación es sub- o supercrítica.

Problema 10: Considere un modelo de respiración de un cultivo de bacterias,

$$\dot{x} = B - x - \frac{xy}{1 + qx^2}, \quad \dot{y} = A - \frac{xy}{1 + qx^2} \quad (2)$$

donde  $x$  e  $y$  son los niveles de nutrientes y oxígeno, y  $A, B, q > 0$  son parámetros. Investigue la dinámica de este modelo. Encuentre todos los puntos fijos y clasifíquelos. Estudie las nulclinas y trate de construir una *región atrapante* del sistema. Puede encontrar condiciones sobre los parámetros donde existe una órbita periódica estable? Use simulaciones numéricas o resultados de la bifurcación de Hopf, o lo que resulte útil. El problema es abierto así que discútalos.

Problema 11: Considere el siguiente problema de dinámica de poblaciones, donde ambas tienen una capacidad de carga finita,

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r_1 N_1 (1 - N_1/K_1) - b_1 N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= r_2 N_2 (1 - N_2/K_2) - b_2 N_1 N_2 \end{aligned}$$

- Adimensionalice el modelo. Cuántos grupos adimensionales son necesarios?
- Muestre que hay 4 retratos de fases cuantitativamente distintos, en términos del comportamiento asintótico del sistema.
- Encuentre las condiciones por las cuales las dos poblaciones pueden coexistir establemente. Explique el significado biológico de la condición. Hint: la capacidad de carga refleja la competencia dentro de la misma especie, donde  $b$  refleja la competencia entre especies.

Problema 12: **Modelo epidemiológico revisado** La idea es ver que es más sencillo analizar este problema en el espacio de fases. El modelo es:

$$\dot{x} = -kxy, \quad \dot{y} = kxy - ly \quad (3)$$

donde  $k, l > 0$ .

- Encuentre y clasifique todos los puntos fijos.
- Haga un dibujo de las nulclinas y del campo vectorial.
- Encuentre una cantidad que se conserve en el sistema.
- Haga un retrato de fases. ¿Qué pasa en  $t \rightarrow \infty$ ?
- Sea  $(x_0, y_0)$  una condición inicial. Una epidemia ocurre cuando  $y(t)$  aumenta inicialmente. ¿Bajo qué condiciones esto ocurre?

Problema 13: **Sistema excitable** Un modelo clásico de excitabilidad es el de Fitzhugh-Nagumo, que modela el potencial de acción de una membrana celular:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a + bx + x^2 - xy \end{aligned}$$

- (a) Dibuje las nulclinas, encuentre los puntos fijos gráficamente y construya un retrato de fases aproximado para las siguientes condiciones de parámetros: (i)  $b > 0$   $a < 0$ , (ii)  $b < 0$   $a > 0$  y  $b \gg a$ .
- (b) Halle una relación explícita entre los parámetros del sistema para que se produzca una bifurcación *saddle-node*.
- (c) Encuentre la condición para que se produzca una bifurcación de Hopf.
- (d) En el espacio de parámetros  $(a, b)$  represente como curvas las dos condiciones anteriores y ensaye un retrato de fases en cada una de las regiones en las que queda dividido el plano. A partir del gráfico deduzca la necesidad de una conexión homoclínica adicional a las bifurcaciones anteriores.