

## Dinámica No lineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 4 - Mapas  
1er cuatrimestre 2011

### Problema 1: Construcción de un Mapa de Poincaré

Considere la siguiente ecuación diferencial de un oscilador forzado periódicamente con disipación  $\delta > 0$ :

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma \cos(\omega t)$$

- Encuentre la solución general del sistema homogéneo teniendo en cuenta los valores posibles de  $\delta^2 - 4\omega_0^2$ . ¿A qué tiende la solución  $x_{hom}(t)$  con  $t$  tendiendo a infinito?
- Halle la solución particular  $x_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ . Escriba la solución general  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  para el caso  $\delta^2 - 4\omega_0^2 < 0$  y obtenga los valores de las constantes de su expresión a partir de las condiciones iniciales  $(x_0, y_0)$  en  $t = 0$ .
- Reescriba la ecuación del oscilador como un sistema de ecuaciones y conviértala en un sistema autónomo definiendo la variable  $\dot{\theta} = \omega$ .
- Defina la sección  $\Sigma$  de Poincaré correspondiente a la condición  $\theta = 0 \in \mathbf{S}^1$ . Encuentre el tiempo  $T$  que transcurre entre cada intersección del flujo con  $\Sigma$ . Escriba a partir de la solución en b) con las condiciones iniciales el mapa  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .
- Compruebe que  $(x, y) = (A, \omega B)$  es un punto fijo del mapa. Encuentre los autovalores de su parte lineal. ¿Es este punto asintóticamente estable? Dibuje la trayectoria de los puntos en el plano  $(x, y)$ .
- ¿Qué ocurre cuando hay resonancia  $\omega = (1/2)\sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2}$ ?
- Para el caso  $\delta = 0$  resuelva el sistema nuevamente y grafique la solución en el toro extendido. Estudie los casos i)  $\omega = m\omega_0$  ii)  $n\omega = \omega_0$ , con  $m, n > 1 \in \mathbf{N}$

### Problema 2: Mapa del Anillo

Considere la siguiente ecuación diferencial para  $A \in \mathbf{C}$ :

$$\frac{dA}{dt} = (1 + i\eta)A - (1 - i\alpha)|A|^2 A + i\epsilon \rho(t)$$

con la función forzante tipo “pataditas”:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- Reescriba el sistema en coordenadas polares (del plano complejo). Compruebe que la solución entre patadas es para la coordenada radial y la angular:

$$\begin{aligned} R(t) &= \left( 1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2} e^{-2t} \right)^{-1/2} \\ \theta(t) &= \theta_0 + (\eta - \alpha)t - \frac{\alpha}{2} \ln \left( R_0^2 + (1 - R_0^2) e^{-2t} \right) \end{aligned}$$

- (b) Observe que  $p(t)$  modifica a  $R = \sqrt{Im(A)^2 + Re(A)^2} \rightarrow R = \sqrt{(Im(A) + \epsilon)^2 + Re(A)^2}$  luego de cada patada. Componga este movimiento con el del item anterior para encontrar como se mapean los puntos previos a cada patada. Verifique que para el límite  $R \approx 1$  y  $\epsilon \ll 1$  se obtiene el siguiente mapa:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= 1 + (R_n + \epsilon \operatorname{sen}(\theta_n) - 1)e^{-2T} \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + (\eta - \alpha)T + \epsilon \cos(\theta_n) - \alpha(1 - e^{-2T})(R_n + \epsilon \operatorname{sen}(\theta_n)) \end{aligned}$$

- (c) Estudie este mapa y vea que se transforma en el mapa del círculo si  $T \gg 1$

**Problema 3: Mapas lineales**

Analice los siguientes mapas. Compute las rbitas e ilstrelas en el espacio de fases. Describa las variedades estables, inestables y centrales del origen.

- (a) 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} |\lambda| < 1 & |\lambda| < 1 \\ |\mu| > 1 & |\mu| < 1 \end{matrix}$$
- (b) 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \omega > 0$$
- (c) 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad |\lambda| < 1$$
- (d) 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0$$

**Problema 4: Mapas no lineales**

Analice los siguientes mapas. Encuentre sus puntos fijos y discuta su estabilidad en la aproximación lineal. Encuentre a partir de los autovectores las variedades estables e inestables dibujando retratos de fases. ¿Puede encontrar rbitas peridicas de rden superior?

- (a) 
$$\begin{aligned} x &\rightarrow x \\ y &\rightarrow x + y \end{aligned}, \quad (x, y) \in R^2$$
- (b) 
$$\begin{aligned} x &\rightarrow x^2 \\ y &\rightarrow x + y \end{aligned}, \quad (x, y) \in R^2$$
- (c) 
$$\begin{aligned} \theta_1 &\rightarrow \theta_1 \\ \theta_2 &\rightarrow \theta_1 + \theta_2 \end{aligned}, \quad (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$$
- (d) 
$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{2xy}{x+y} \\ y &\rightarrow \left(\frac{2xy^2}{x+y}\right)^{1/2} \end{aligned}, \quad (x, y) \in R^2$$
- (e) 
$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{x+y}{2} \\ y &\rightarrow (xy)^{1/2} \end{aligned}, \quad (x, y) \in R^2$$

**Problema 5: Mapa logístico**

Encuentre los puntos fijos y algunos puntos fijos de periodo bajo del mapa

$$x \rightarrow \mu x(1 - x), \quad \mu \in [0, 4]$$

¿Puede encontrar valores de bifurcación en los que aparecen nuevas órbitas periódicas?