Dinámica Nolineal (Cátedra Mindlin)

Guia N° 3 - Flujos en el círculo
1er cuatrimestre 2009

Problema 1: **Oscilador no-uniforme.** Calcule el tiempo de paso a través de un flujo con una bifurcación de saddle-node. Para esto calcule la integral $T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r+x^2}$. Para evaluarla haga un cambio de variables $x = \sqrt{r}\tan\theta$, use la identidad $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ y cambie los limites de integración. Muestre entonces que $T = \pi/\sqrt{r}$.

Problema 2: El periodo de un oscilador nouniforme está dado por $T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\omega - a\sin\theta}$, donde $\omega > a > 0$. Evalue la integral de esta forma.

(a) Sea $u = \tan(\theta/2)$. Resuelva para θ y luego exprese $d\theta$ en términos de u y du.

(b) Pruebe que $\sin\theta = 2u/(1+u^2)$. Utilice un triángulo rectángulo de longitud de la base 1 y de altura u. Defina $\theta/2$ el ángulo opuesto a lado u. Utilice la formula $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$

(c) Muestre que $u \to \pm\infty$ cuando $\theta \to \pm\pi$, y reescriba los limites de integración de la integral.

(d) Exprese T como función de u.

(e) Finalmente complete el cuadrado en el denominador del integrando del punto anterior y reduzca la integral a la del ejercicio anterior.

Problema 3: Para los siguientes problemas dibuje los retratos de fase como función del parámetro de control μ. Clasifique las bifurcaciones que ocurren a medida que μ varía y encuentre todas los valores μ de las bifurcaciones.

(a) $\dot\theta = \mu\sin\theta - \sin 2\theta$

(b) $\dot\theta = \mu + \cos\theta + \cos 2\theta$

(c) $\dot\theta = \mu + \sin\theta + \cos 2\theta$

(d) $\dot\theta = \frac{\sin\theta}{\mu + \cos\theta}$

(e) $\dot\theta = \frac{\sin\theta}{\mu + \sin\theta}$

(f) $\dot\theta = \frac{\sin\theta}{1 + \mu\sin\theta}$

Problema 4: **Péndulo sobreamortiguado.** Encuentre la condición para que sea válido aproximar la ecuación de movimiento $mL^2\ddot\theta + b\dot\theta + mgL\sin\theta = \Gamma$ por su limite sobreamortiguado

$$b\dot\theta + mgL\sin\theta = \Gamma$$

Problema 5: Suponga que agrega un resorte de torsión al péndulo sobreamortiguado del problema anterior. La ecuación de movimiento resulta entonces

$$b\dot\theta + mgL\sin\theta = \Gamma - k\theta$$

(a) Esta ecuación da un campo vector bien definido?
(b) Adimensionalice la ecuación.
(c) Qué hace el péndulo asintóticamente en el tiempo.
(d) Muestre que ocurren muchas bifurcaciones a medida que k varía de 0 a ∞. Qué bifurcaciones son?

Problema 6: **Luciérnagas.** En algunas zonas del sudeste asiático existen colonias de luciérnagas que se sincronizan colectivamente: miles de luciérnagas emitiendo luz al unísono. Para estudiar cómo es el proceso de sincronización se estudió experimentalmente el comportamiento de una luciérnaga frente a un estímulo de luz periódico.
Suponga que $\theta(t)$ es la fase del ritmo de prendido de la luz de la luciérnaga. El estímulo periódico está dado por $\dot{\Theta} = \Omega$.
La respuesta de la luciérnaga estará dada por $\dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$, donde f es una onda triangular y se define ϕ como la diferencia de fase entre θ y Θ: $\phi = \Theta - \theta$

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2 \end{cases} \tag{1}$$

en el intervalo $-\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$, y extienda periódicamente f fuera de este intervalo.
(a) Grafique $f(\phi)$.
(b) Encuentre el rango de dinámica acotada.
(c) Asuma que las luciérnagas están lockeadas al estímulo, encuentre una fórmula para la diferencia de fase ϕ^*.
(d) Encuentre una fórmula para T_{drift}, donde

$$T_{drift} = \int_0^{2\pi} dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi \tag{2}$$

Problema 7: **Sistema excitable.** Suponga que estimula una neurona inyectándole un pulso de corriente. Si el estímulo es pequeño, el potencial de membrana aumenta un poco y luego relaja a su estado de reposo. Sin embargo, si el estímulo supera un umbral la neurona "dispara" y produce un potencial de membrana grande y luego vuelve al potencial de reposo. Sorprendentemente el tamaño del pico del potencial no depende del estímulo, *i.e.*, cualquier valor del estímulo que esté por encima del umbral genera el mismo valor de pico de potencial. Estos sistemas se los conoce como *excitables*, cumpliendo con las siguientes condiciones: *i)* tiene un atractor único; *ii)* para un estímulo suficientemente grande, el sistema realiza una excursión grande en el espacio de fases antes de volver a su estado de reposo.
Analice el sistema excitable más sencillo $\dot{\theta} = \mu + \sin\theta$, donde μ tiene un valor levemente menor a 1.
(a) Muestre que este sistema satisface las dos condiciones de sistema excitable.
(b) Sea el potencial de membrana $V(t) = \cos\theta(t)$. Haga un gráfico de $V(t)$ para varias condiciones iniciales.