Dinámica No lineal (Cátedra Mindlin)

Guía N° 6 - Sincronización en el modelo de Kuramoto
1er cuatrimestre 2010

Problema 1: El problema de considerar poblaciones de osciladores interactuando es de interés en muchas ramas de la física, así como también en biología. Kuramoto consideró una versión simplificada de este problema y derivó algunos resultados importantes, que vamos a mirar en detalle en esta guía. Considere el modelo de Kuramoto.

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{\epsilon}{N}\sum_{j=1}^{N} sin(\theta_j - \theta_i) \tag{1}$$

Kuramoto define el parametro de orden del sistema como

$$r(t)e^{i\phi(t)} = \sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j(t)} \tag{2}$$

(a) Usando la definición del parametro de orden, reescriba las ecuaciones del sistema y llegue a que cada oscilador se acopla al campo medio

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \epsilon r(t) sin(\phi - \theta_i). \tag{3}$$

En el límite $N \to \infty$ la descripción del estado del sistema se hace a través de la distribucion de probabilidad $\rho(\theta, \omega, t)$. Esta distribución debe satisfacer la condición de normalización

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega, t) d\theta = g(\omega) \tag{4}$$

donde $g(\omega)$ es la distribución de frecuencias propias de los osciladores, y que asumimos constante en el tiempo. El parámetro de orden del sistema queda escrito en términos de ρ

$$re^{i\phi} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} d\theta d\omega \rho(\theta, \omega, t) e^{i\theta} \tag{5}$$

y como la cantidad de osciladores se conserva, podemos escribir una ecuación de continuidad para la densidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}([\omega + \epsilon r sin(\phi - \theta)]\, \rho) = 0 \tag{6}$$

(b) Muestre que el estado completamente incoherente (una distribución constante) es una solución posible.

(c) Muestre que el estado completamente sincronizado es solución. Como es la distribución en este caso?

Un estado de sincronización parcial se puede escribir como

$$\rho = \delta(\theta - \phi - sin^{-1}(\frac{\omega}{\epsilon r}))H(cos(\theta)) \tag{7}$$

si $-\epsilon r < \omega < \epsilon r$ ó

$$\rho = \frac{C}{|\omega - \epsilon r sin(\theta - \phi)|} \tag{8}$$

donde $H(x) = 1$ si $x > 0$ y $H(x) = 0$ si $x < 0$ es la función de Heavyside y obtenemos $C = \frac{\sqrt{\omega^2 - (\epsilon r)^2}}{2\pi}$ de la condición de normalización.

(d) Que condición debe cumplirse para que esta expresión resulte solución de la ecuación de continuidad?

Problema 2: El modelo de Kuramoto puede generalizarse para incluir diferentes poblaciones interactuando. El i-ésimo oscilador de la población σ - ésima, tiene la siguiente dinámica.

$$\theta_i^\sigma = \omega + \sum_{\sigma'=1}^{n} \sum_{j=1}^{N^{\sigma'}} \frac{K_{\sigma\sigma'}}{N^{\sigma'}} sin(\theta_j^{\sigma'} - \theta_i^\sigma) \tag{9}$$

donde n es el número de poblaciones y N^σ es la cantidad de osciladores en la población σ

(a) Como podemos generalizar el parámetro de orden del problema anterior? Reescriba las ecuaciones del sistema en términos del parámetro de orden generalizado.

(b) Que sucede si tomamos el límite $N^\sigma = 1$ y n es grande?

Problema 3: Otra generalización que se le puede hacer al modelo de Kuramoto, es considerar una función de acople mas general. Tomemos entonces una función $h(\theta)$, que tendrá que ser periódica y realicemos una expansión en Fourier. Como sólo nos interesan interacciones del tipo atractivo, solo consideraremos las funciones impares.

$$h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(n\theta) \tag{10}$$

Con esta definición, el modelo de Kuramoto queda escrito como

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(n(\theta_j - \theta_i)) \tag{11}$$

(a) Generalice el parámetro de orden y obtenga una expresión de las ecuaciones dinámicas del sistema, en términos del mismo. Este problema fue estudiado, entre otros, por Daido y Crawford.

Problema 4: Recientemente, Ott y Antonsen dieron un paso importante en el estudio del problema de Kuramoto en el límite $N \to \infty$. Si uno propone una solución en serie de Fourier para la ecuación de continuidad,

$$\rho(\theta, \omega, t) = \frac{g(\omega)}{2\pi}(1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_n(\omega, t) e^{in\theta} + C.C.) \tag{12}$$

obtiene en principio, un sistema infinito de ecuaciones diferenciales acopladas para los f_n. Ott y Antonsen notaron que si uno propone el ansatz $f_n(\omega, t) = (\alpha(\omega, t))^n$ entonces todas las ecuaciones quedan iguales, es decir, se reduce el problema a resolver una sola ecuación para α.

(a) Encuentre el sistema de ecuaciones para los f_n. (ojo que esta cuenta es engorrosa,solo para valientes y opcional)

(b) A partir de la definición del parámetro de orden, la forma propuesta de la solución y el ansatz, exprese el parámetro de orden en términos de α. Para esto asuma una distribución de frecuencias propias lorentziana

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{(\omega - \omega_0)^2 - \Delta^2} \tag{13}$$

donde Δ y ω_0 son parámetros que caracterizan la distribución (dispersión y valor medio respectivamente). AYUDA: Para hacer esta cuenta hay que hacer una integración por residuos (para sacarse de encima la integral en ω)

Finalmente, se puede mostrar que uno obtiene la siguiente ecuación para α. Sea $\alpha = \rho e^{\phi}$, entonces ($\dot{\phi} = 0$)

$$\frac{d\rho}{dt} + (1 - \frac{1}{2}\epsilon)\rho + \frac{1}{2}\rho^3 = 0 \tag{14}$$

(c) Describa cualitativamente las soluciones de esta ecuación. Que ocurre cuando cambio los parámetros? De que bifurcación se trata?

(d) Realice el diagrama de bifurcaciones del sistema.

(e) Interprete estos resultados en términos del trabajo original de Kuramoto (problema 1). Muestre en particular, que se obtiene el mismo exponente crítico en la transición.

<u>Problema 5:</u> El mismo año que Ott publicó su resultado (2008), Strogatz y Childs extendieron este enfoque y estudiaron el modelo de Kuramoto forzado

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{N} sin(\theta_j - \theta_i) + F sin(\sigma t - \theta_i) \tag{15}$$

Este sistema lo podemos reescribir en un sistema de coordenadas co-rotante con el forzante y obtenemos

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \gamma sin(\theta_i) + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{N} sin(\theta_j - \theta_i) \tag{16}$$

(a) Demuestre esta última afirmación. Escriba γ en términos del sistema original

Notamos aquí, que el sistema visto en las coordenadas rotantes, es matemáticamente equivalente al problema de muchos osciladores exitables interactuado (de los del tipo I, problema 7 guía 5).

(b) Escriba la ecuación de continuidad para la distribución de osciladores de este problema

(c) Proponga una solución en serie de Fourier y obtenga las ecuaciones para los modos f_n (ojo, esta cuenta es engorrosa y opcional)
Usando el anzats en el sistema de ecuaciones para los f_n, obtenemos una ecuación diferencial para α. En coordenadas polares resultado

$$\dot{\rho} = \frac{K}{2}\rho(1-\rho^2) - \rho + \frac{\gamma}{2}(1-\rho^2)cos(\phi) \tag{17}$$

y

$$\dot{\phi} = -(\omega + \frac{\gamma}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})sin(\phi) \tag{18}$$

(d) Tome el límite apropiado y recupere los resultados del modelo de Kuramoto a partir de estas ecuaciones.